Избранные задачи старших классов

1. 55%. Если всем членам семьи станут платить вдвое больше, общий доход увеличится на 100%. Из этих 100 процентов 5 приходится на Машу, 15 – на маму, 25 – на папу, а остальные 55 – на дедушку. Значит, если дедушке удвоят пенсию, доход всей семьи возрастет на 55%.

2. Например, 1111111613. Сначала найдем какое-нибудь число, не обязательно десятизначное, но удовлетворяющее остальным условиям задачи. Например, такое число, что после прибавления к нему произведения цифр они попросту меняются местами. Если последние цифры числа 13, то, чтобы поменять их местами, нужно прибавить 18. Чтобы произведение цифр было 18, нужно дописать еще цифру 6. Чтобы получить десятизначное число, припишем слева недостающее число единиц. Произведение цифр от этого не изменится.

3. Нельзя. Предположим, что такая раскраска возможна. Доску 8×8 можно разрезать на восемь прямоугольников 4×2, поэтому на ней ровно $8\cdot 4 = 32$ закрашенные клетки. Ее же можно разрезать на четыре квадрата 3×3, три прямоугольника 4×2 и угловой квадратик 2×2 (рис.9). В четырех квадратах и трех прямоугольниках уже $4\cdot 5+3\cdot 4 = 32$

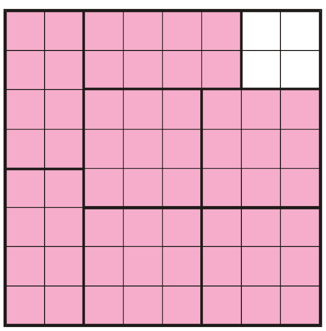

Рис. 9

закрашенные клетки, поэтому в угловом квадратике не должно быть закрашенных клеток. То же и в остальных угловых квадратиках 2×2. Доску без таких квадратиков можно разрезать на шесть прямоугольников 4×2. Получаем, что всего на доске $6\cdot 4 = 24$ закрашенные клетки. Противоречие.

4. Все углы по 60°, треугольник равносторонний. Для внешних углов BXC и AYB треугольников ABX и CAY запишем равенства

$$\angle BXC = \angle ABX + \angle BAX,$$

$$\angle AYB = \angle CAY + \angle YCA.$$

В силу условия задачи $\angle BAX = \angle YCA$, т.е. $AB = BC$.
В треугольниках XBC и YAB равны две стороны и *угол не между ними*: $\angle BXC = \angle AYB$, $XC = YB$, $BC = AB$. Такие треугольники либо равны, либо $\angle XBC + \angle YAB = 180^\circ$ (докажите!). Но второй вариант в данной ситуации невозможен (докажите!). Как следствие, $\angle ABC = \angle BCA$, и треугольник ABC равносторонний.

5. 21 авиалиния. Обозначим число различных авиалиний между городами через k. Если мы уберем одну из них, города могут распасться на две несвязанные группы. После удаления следующей авиалинии не более одной группы распадется еще на две. Продолжая аналогично, получим, что после удаления последней авиалинии количество разрозненных групп не превысит $k + 1$. Поскольку 15 городов без авиалиний – это 15 групп, то $k \ge 14$.
Обозначим количество линий у авиакомпаний через a, b и c. По доказанному, $a+b \ge 14$, $b+c \ge 14$, $c+a \ge 14$. Складывая эти неравенства, получаем $2(a+b+c) \ge 42$. Примеры с 21 авиалинией показаны на рисунке 10.

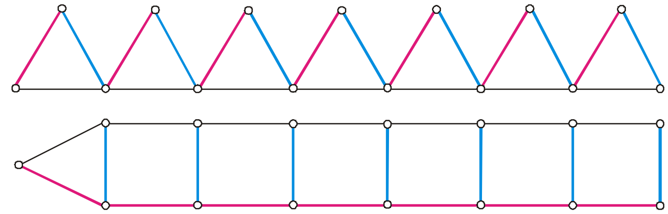

Рис. 10

6. Есть. Сначала Маша называет 2. Если Петя не проиграл, то его число было нечетным и после вычитания двойки останется нечетным.
Теперь Маше следует назвать 3. Рассмотрим возможные остатки исходного Петиного числа (нечетного) при делении на 6 = НОК (2, 3). Если остаток был 5, то после первого хода он стал 3, и Маша выигрывает вторым ходом. Игра будет продолжаться, если исходное Петино число давало остаток 1 или 3 при делении на 6. После двух ходов из него вычтется 2 + 3 = 5, и остаток при делении на 4 станет 2 или 0.
Третье число Маши – 4. Возможные остатки Петиного числа перед этим ходом при делении на 12 = НОК (3, 4) были 2, 4, 8 или 10. Игра будет продолжаться, если остаток был 2 или 10 (иначе число разделится на 4), после вычитания 4 он превратится соответственно в 10 или 6.
Четвертое число Маши – 6. Если Петино число давало остаток 6 при делении на 12, оно разделится на 6. В противном случае после вычитания 6 остаток равен 4. Маша называет 16, чтобы после вычитания 15 Петино число стало делиться на 12. После этого можно называть 12 – число разделится!
Участниками олимпиады были придуманы и другие последовательности ходов Маши. Попробуйте доказать, что минимально возможную сумму чисел имеет последовательность 6, 4, 3, 2, 5, 12.

7. Площади фигур равны. *Указание.* Наложим одного головастика на другой, как показано на рисунке 11. Если отрезать от первого головастика закрашенные сегменты и повернуть их вокруг точек A_1 и B_1 на 180°, то получится в точности второй головастик.

8. Если число n простое, то выигрывает второй игрок, иначе выигрывает первый игрок. После первого хода образуется равнобедренная трапеция, у которой сумма меньшего основания и боковой стороны равна большему основанию. Пусть на каком-то ходу один из игроков получил шоколадку в форме равнобедренной трапеции с меньшим основанием a, большим основанием b и боковой стороной $b - a$. Если он отломит треугольник (у большего основания), сторона которого меньше, чем $b - a$, то другой игрок может отломать треугольник со стороной 1 у другого конца большего основания, и первый из игроков досрочно проигрывает. Следовательно, в этой ситуации он должен отломить треугольник со стороной $b - a$, и получится параллелограмм.

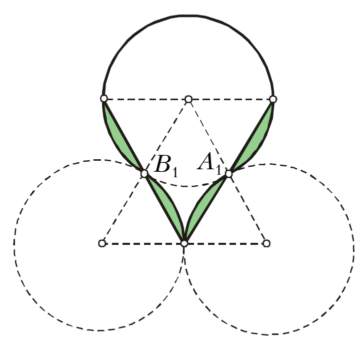

Рис. 11

Пусть игрок получил шоколадку в форме параллелограмма со сторонами a и b, причем $a < b$. Тогда, по аналогичным соображениям, он должен отломить треугольник со стороной a.
Как следствие, если в некоторый момент один из игроков получил шоколадку в форме параллелограмма со сторонами a и b ($a < b$), то через два хода он получит шоколадку в форме параллелограмма со сторонами a и $b - a$. Если же он получил ромб, то после его хода образуется треугольник.
Приведем выигрышную стратегию для второго игрока при простом n. Ему достаточно каждый раз отламывать кусок наибольшего размера. После каждого хода второго игрока об-