

11. Существуют ли такие натуральные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$ , что у каждого из уравнений  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $ax^2 + bx - c = 0$ ,  $ax^2 - bx + c = 0$ ,  $ax^2 - bx - c = 0$  оба корня целые? (10)

*В.Клепцын*

12. По ребрам выпуклого многогранника с 2003 вершинами проведена замкнутая ломаная, проходящая через каждую вершину ровно один раз. Докажите, что в каждой из двух частей, на которые эта ломаная делит поверхность многогранника, количество граней с нечетным числом сторон нечетно. (10)

*А.Заславский*

13. Пусть  $P(x)$  – многочлен со старшим коэффициентом 1, а последовательность целых чисел  $a_1, a_2, \dots$  такова, что  $P(a_1) = 0$ ,  $P(a_2) = a_1$ ,  $P(a_3) = a_2$  и т.д. Числа в последовательности не повторяются. Какую степень может иметь  $P(x)$ ? (10)

*Б.Френкин*

14. Пусть  $M$  – точка пересечения медиан в треугольнике  $ABC$ . На перпендикулярах, опущенных из  $M$  на стороны  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$ , взяты точки  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  соответственно, причем  $A'B' \perp MC$  и  $A'C' \perp MB$ . Докажите, что  $M$  является точкой пересечения медиан также и в треугольнике  $A'B'C'$ . (10)

*А.Заславский*

15. Дан вписанный четырехугольник  $ABCD$ . Точки  $P$  и  $Q$  симметричны точке  $C$  относительно прямых  $AB$  и  $AD$  соответственно. Докажите, что прямая  $PQ$  проходит через ортоцентр (точку пересечения высот)  $H$  треугольника  $ABD$ . (11)

*А.Заславский*

16. На берегу круглого острова Гдетотам расположено 20 деревень, в каждой живет по 20 борцов. Был проведен турнир, в котором каждый борец встретился со всеми борцами из всех других деревень. Деревня  $A$  считается сильнее деревни  $B$ , если хотя бы  $k$  поединков между борцами из этих деревень закончились победой борца из деревни  $A$ . Выяснилось, что каждая деревня сильнее следующей за ней по часовой стрелке. Какое наибольшее значение может иметь  $k$ ? (У всех борцов разная сила, и в поединке всегда побеждает сильнейший.) (11)

*И.Богданов*

17. Дано равенство

$$(a^{m_1} - 1) \dots (a^{m_n} - 1) = (a^{k_1} + 1) \dots (a^{k_l} + 1),$$

где  $a$ ,  $n$ ,  $l$  и все показатели степени – натуральные числа. Найдите все возможные значения числа  $a$ . (11)

*В.Сендеров*

*Публикацию подготовили А.Спивак, Б.Френкин*

# Избранные задачи Московской физической олимпиады

## Первый теоретический тур

*8 класс*

1. Велосипедисту и автобусу нужно проехать из пункта  $A$  в пункт  $B$ , расстояние между которыми 11 км. Они выезжают одновременно. Автобус, двигаясь со скоростью 60 км/ч, через каждый километр пути делает остановку на 2 мин. Велосипедист движется с постоянной скоростью, не останавливаясь. Какой должна быть скорость велосипедиста, чтобы он обогнал автобус на каждой промежуточной остановке между пунктами  $A$  и  $B$ ?

*О.Шведов*

2. Алюминиевую болванку массой  $M = 108$  кг нужно переправить на противоположный берег озера. В качестве «плавсредства» можно использовать сосновое бревно с площадью поперечного сечения  $S = 0,034$  м<sup>2</sup>. Болванка привязывается к бревну веревкой. Какова должна быть минимальная длина бревна  $L$ ? Плотность алюминия  $\rho_a = 2700$  кг/м<sup>3</sup>, плотность древесины  $\rho_d = 600$  кг/м<sup>3</sup>, плотность воды  $\rho_v = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Сам переправляющий может плыть и тянуть бревно с болванкой за собой на веревке.

*С.Варламов*

3. В сосуд, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, основание которого – квадрат со стороной  $a = 10$  см, налили  $V = 1$  л воды с температурой  $t_1 = 5$  °С, после чего положили туда кубик льда массой  $m = 100$  г с температурой  $t_2 = 0$  °С. Какими будут установившиеся температура, состав системы и уровень воды в сосуде? Удельная теплота плавления льда  $\lambda = 335$  кДж/кг, удельная теплоемкость воды  $c = 4,2$  кДж/(кг · °С), плотность воды  $\rho_v = 1$  г/см<sup>3</sup>, плотность льда  $\rho_d = 0,9$  г/см<sup>3</sup>. Теплоемкостью сосуда и теплообменом с окружающей средой пренебречь.

*О.Шведов*

*9 класс*

1. Два корабля находятся в море и движутся равномерно и прямолинейно. Первый в полдень был в 40 милях севернее маленького острова и двигался со скоростью 15 миль в час в направлении на восток. Второй в 8 часов утра этого же дня был в 100 миль восточнее того же острова и двигался со скоростью 15 миль в час в направлении на юг. На каком минимальном расстоянии друг от друга прошли корабли, и в какой момент времени это случилось?

*С.Варламов*