деления уголком, как это было сделано выше. В частности, одна из проходящих через точку $N(4;-16)$ касательных будет горизонтальной с точкой касания $x_0 = 3$. Теперь один из корней (11) мы знаем и можем определить абсциссы двух других точек касания: $x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{105}}{4}$. Проведите соответствующие касательные на рисунке 6 самостоятельно.

Упражнение 4. Сколько существует целых значений параметра r, при которых через начало координат проходят три различные прямые, касающиеся графика функции $y = x^3 + 6x^2 - 12x + r$?

Задачи о касательной к параболе и кубической параболе часто встречаются на вступительных экзаменах. Вот несколько примеров.

Упражнения

5. При каком значении коэффициента b прямые $y = -x$ и $y = 7x$ касаются параболы $y = ax^2 + bx + c$ в двух различных точках?

6. Прямые $y = 4x + 5$ и $y = 2x + 9$ касаются параболы $y = ax^2 + bx + c$ в двух различных точках. Найдите абсциссу середины отрезка, соединяющего точки касания.

7. Касательная к параболе $y = x^2 + ax + 9$ проходит через начало координат, точка касания обозначена через M. Найдите наименьшее возможное значение длины отрезка OM при всевозможных допустимых значениях параметра a.

8. Касательная к параболе $y = x^2 - 3$ отсекает от координатных осей треугольник. Найдите наименьшее возможное значение площади этого треугольника.

9. На параболе $y = ax^2 + bx + 4$ существует единственная точка M, обладающая тем свойством, что если в этой точке провести касательную к параболе, то отрезок этой касательной, заключенный между координатными осями, делится точкой M пополам. Найдите ординату вершины параболы.

10. К параболе $y = x^2 - \left(a^2 + 4\right)x + 8\sqrt{a}$ в точке ее пересечения с осью Oy проведена касательная. Найдите наибольшее возможное значение площади треугольника, ограниченного этой касательной и координатными осями, при всевозможных допустимых значениях параметра a.

11. График функции $y = -x^3 + px^2 + qx + r$ пересекает ось Ox в точке с абсциссой $x = 0$ и касается оси Ox в точке с абсциссой $x = 6$. Найдите абсциссу точки локального максимума этой функции.

12. Найдите абсциссу точки локального максимума функции $y = x^3 + px^2 + r$, если прямая, касающаяся графика этой функции в точке с абсциссой 5, пересекает этот график в точке с абсциссой −13.

13. При каком отличном от нуля значении параметра r касательная к графику функции $y = x^3 + 2x^2 + 3x + r$, проведенная в точке его пересечения с осью Oy, проходит через точку пересечения этого графика с осью Ox?

14. Касательная к графику функции $y = x^3 + px^2 + qx + r$, проведенная в точке с абсциссой 15, проходит через точку пересечения этого графика с осью Oy. Абсцисса точки локального минимума этой функции равна 25. Найдите абсциссу точки локального максимума.

15. Сколько существует целых значений параметра r, при которых через начало координат проходят четыре различные прямые, касающиеся графика функции $y = 5x^4 - 18x^2 + r$?

ОЛИМПИАДЫ

LXVI Московская математическая олимпиада

Математический праздник

6 класс

1. Один мальчик 16 февраля 2003 года сказал: «Разность между числами прожитых мною месяцев и прожитых (полных) лет сегодня впервые стала равна 111». Когда он родился?

С.Токарев

2. Найдите наименьшее четырехзначное число *СЕЕМ*, для которого существует решение ребуса

МЫ + РОЖЬ = СЕЕМ

(одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные).

С.Токарев, А.Хачатурян

3. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, каждое утверждение которых ложно. Путник встретил троих островитян и спросил каждого из них: «Сколько рыцарей среди твоих спутников?» Первый ответил: «Ни одного». Второй сказал: «Один». Что сказал третий?

С.Токарев

4. Прямоугольник разрезан на несколько прямоугольников, периметр каждого из которых – целое число метров. Верно ли, что периметр исходного прямоугольника – тоже целое число метров?

А.Спивак

5. В распоряжении юного паркетчика имеются 10 одинаковых плиток, каждая из которых состоит из 4 квадратов и имеет форму буквы Г (все плитки ориентированы одинаково). Может ли он составить из них прямоугольник размером 5×8? (Плитки можно поворачивать, но нельзя переворачивать. Например, на рисунке 1 изображено неверное решение: закрашенные плитки неправильно ориентированы.)

А.Спивак

6. На гранях кубика расставлены числа от 1 до 6. Кубик бросили два раза. В первый раз сумма чисел на четырех