При $D = 4\left(p^2 - 3q\right) > 0$ производная имеет два различных корня x_{01} и x_{02}. Предположим, что $x_{01} < x_{02}$. Тогда $y' = 3\left(x - x_{01}\right)\left(x - x_{02}\right)$, при переходе через каждый из корней производная меняет знак, и функция достигает при $x = x_{01}$ локального максимума, а при $x = x_{02}$ – локального минимума. При этом она может иметь один корень (рис.4), два корня – в этом случае часто говорят, что корней три, но два из них совпадают (рис.5), и три корня (рис.6).

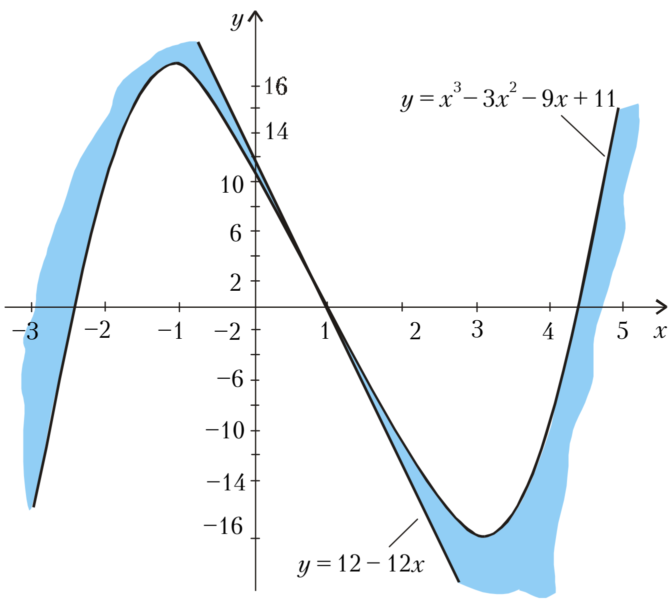

Рис. 6

Теперь нетрудно сформулировать условия, необходимые и достаточные для того, чтобы уравнение (6) имело n различных корней, где n = 3, 2, 1. Для функции $y = f(x)$, определяемой равенством (5), и корней x_{01} и x_{02} правой части выражения (7), удовлетворяющих неравенству $x_{01} < x_{02}$, эти условия для n = 3 выглядят так:

$$\begin{cases} p^2 - 3q > 0, \\ f\left(x_{01}\right) > 0, \\ f\left(x_{02}\right) < 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Для выполнения условия n = 2 необходимо и достаточно, чтобы функция обращалась в ноль в одной из двух различных точек локального экстремума:

$$\begin{cases} p^2 - 3q > 0, \\ f\left(x_{01}\right) f\left(x_{02}\right) = 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Во всех случаях, когда ни условия (8), ни условия (9) не выполнены, уравнение (6) имеет единственный корень.

Упражнение 2. Почему функция (5) не может обращаться в ноль в обеих точках локального экстремума?

Кубическая парабола и прямая

Перейдем теперь к вопросу о взаимном расположении на плоскости прямой и кубической параболы. Глядя на рисунки 3 и 4 – а они отражают все возможное разнообразие форм кубической параболы, – легко понять, что прямая может пересекать кубическую параболу в одной, двух и трех точках. Согласно упражнению 1, одна точка пересечения есть наверняка. Если такая точка ровно одна, то, как видно из тех же рисунков, прямая вовсе не обязана касаться кубической параболы. Запишем уравнение касательной:

$$y = \left(3x_0^2 + 2px_0 + q\right)x - 2x_0^3 - px_0^2 + r. \qquad (10)$$

Упражнение 3. Может ли прямая касаться кубической параболы в двух различных точках?

Нас интересует та же задача, что и выше: *сколько касательных к кубической параболе можно провести через фиксированную точку плоскости* $N(a; b)$?

Подстановка координат этой точки в (10) приводит к уравнению

$$2x_0^3 + (p - 3a)x_0^2 - 2pax_0 + (b - qa - r) = 0 \qquad (11)$$

относительно абсциссы x_0 точки касания. Различных касательных, проходящих через $N(a; b)$, будет столько, сколько различных корней у этого уравнения. Коэффициент «2» перед кубом не пугает, так как можно обе части разделить на 2, т.е. рассмотреть функцию

$$f(x) = x^3 + \frac{1}{2}(p - 3a)x^2 - pax + \frac{1}{2}(b - qa - r). \qquad (12)$$

Хотя бы один корень у нее есть наверняка, т.е. хотя бы одна касательная к кубической параболе через любую точку на плоскости заведомо проходит. Для того чтобы выяснить, можно ли провести через $N(a; b)$ две или три касательные, нужно применить полученные выше условия (8) и (9) к новой функции. Рекомендуем читателю далее самому проделать несложные выкладки и для начала убедиться, что производная функции (12) имеет очень приятный дискриминант: $D = (p + 3a)^2$. При $a \neq -\frac{p}{3}$ корни производной различны, а так как мы пока не знаем, какой из них больше, то примем $x_1 = -\frac{p}{3}$, $x_2 = a$. При этом

$$\begin{gathered} f\left(x_1\right) = \left(\frac{p^2 - 3q}{6}\right)a + \frac{1}{2}b + \frac{p^3 - 27r}{54}, \\ f\left(x_2\right) = \frac{1}{2}\left(b - \left(a^3 + pa^2 + qa + r\right)\right). \end{gathered} \qquad (13)$$

Если $a \neq -\frac{p}{3}$, через $N(a; b)$ проходят две касательные к кубической параболе, когда правая часть одного из выражений (13) равна 0. Это означает, что координаты точки $N(a; b)$ связаны между собой одним из соотношений

$$\begin{gathered} b = \left(q - \frac{p^2}{3}\right)a + \left(r - \frac{p^3}{27}\right), \\ b = a^3 + pa^2 + qa + r. \end{gathered} \qquad (14)$$

Второе из этих равенств безусловно означает, что N может лежать на самой кубической параболе, про первое же пока можно только утверждать, что N лежит на некоторой прямой, и мы сейчас попробуем выяснить, чем замечательна эта прямая. Но сначала еще раз напомним, что выводы (14) относятся только к случаю, когда $a \neq -\frac{p}{3}$.

Похоже, что точка P с абсциссой $\left(-\frac{p}{3}\right)$ играет на графике какую-то особую роль. Эту роль легко понять, если найти вторую производную функции, определяющей кубическую параболу: $y'' = 6x + 2p$. Таким образом, в точке P вторая производная равна нулю, при $x < -\frac{p}{3}$ будет $y'' < 0$, а при $x > -\frac{p}{3}$ соответственно $y'' > 0$. Искушенный читатель знает, что в этом случае P является точкой перегиба графика, т.е. слева и справа от P кубическая парабола имеет различ-