$= 0$. Существенное отличие кубической параболы от обычной состоит в том, что она всегда пересекает ось Ox, иначе говоря, уравнение

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \qquad (6)$$

имеет хотя бы одно действительное решение. Это следует из того, что функция (5) непрерывна, отрицательна при достаточно больших по модулю отрицательных значениях x и положительна при достаточно больших положительных значениях x. Возможно, кто-то из читателей знает о существовании так называемой формулы Кардано для корней кубического уравнения. Беда в том, что использовать эту формулу для решения конкретного уравнения удается только в исключительных, а точнее – специально подобранных случаях. Рассмотрим, например, уравнение $x^3 - 3x^2 - 16x + 48 = 0$. В левой части его члены легко группируются: $(x-3)\left(x^2 - 16\right) = 0$, поэтому $x_1 = 3$, $x_{2,3} = \pm 4$. Между тем, строгое следование формуле Кардано приводит к такому результату:

$$x = 1 + \sqrt[3]{-15 + \frac{28\sqrt{3}}{9}i} + \sqrt[3]{-15 - \frac{28\sqrt{3}}{9}i},$$

где i – мнимая единица. Даже большой любитель математики вообще и действий с комплексными числами в частности не увидит в этой записи приведенных выше корней.

Если число a является корнем уравнения (6), то по теореме Безу многочлен из левой части делится на $(x - a)$. Частным от деления будет многочлен второй степени, число его различных корней – от 0 до 2, поэтому число различных корней уравнения (6) – от 1 до 3.

Упражнение 1. Докажите, что всякая прямая $y = kx + b$ пересекает кубическую параболу (5) хотя бы в одной точке.

Как и положено при исследовании функции и построении ее графика, отметим, что производная функции (5) равна

$$y' = 3x^2 + 2px + q. \qquad (7)$$

График производной – обычная парабола с ветвями, направленными вверх, и ее расположение определяется только дискриминантом $D = 4\left(p^2 - 3q\right)$. Если $D < 0$, то $y' > 0$ при любых x, исходная функция возрастает на всей оси, имеет единственный корень, а ее график похож на изображенный на рисунке 3,*а*. Если $D = 0$, то у функции появляется точка, подозрительная на экстремум – единственный корень x_0 правой части (7). Но сама правая часть при этом есть $3\left(x - x_0\right)^2$, слева и справа от x_0 будет $y' > 0$, так что возникшие подозрения не оправданы. Точка x_0 замечательна только тем, что в ней касательная к кубической параболе горизонтальна, функция по-прежнему возрастает на всей числовой оси (напомним, что условие $y'\left(x_0\right) > 0$, достаточное для возрастания функции $y = f(x)$ в точке x_0, не является необходимым). В рассматриваемом случае функция по-

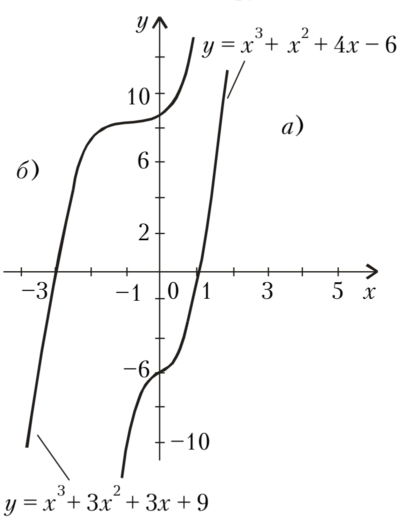

Рис. 3

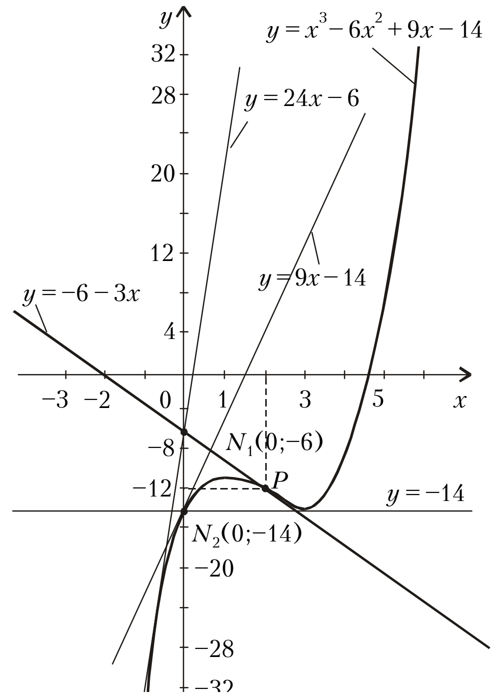

Рис. 4

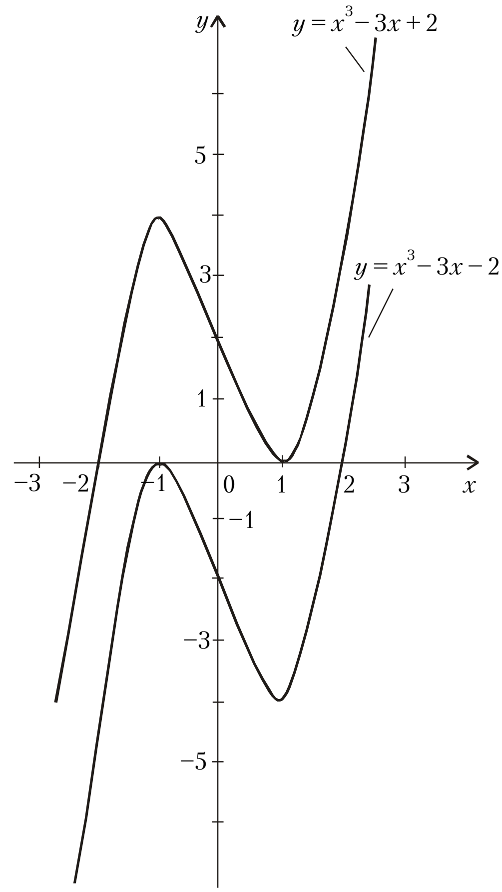

Рис. 5

прежнему имеет единственный корень, ее график похож на приведенный на рисунке 3,*б* и на график функции $y = x^3$. Последнее естественно, так как если $y' = 3\left(x - x_0\right)^2$, то $y = \left(x - x_0\right)^3 + C$, где $C = \text{const}$.