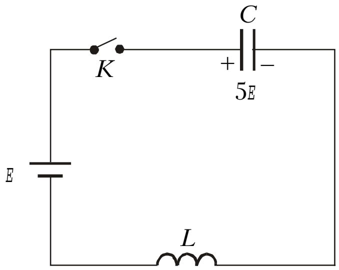

Рис. 11

редственно перед замыканием ключа K_2 и напряжение U_m.

3. В схеме (рис.11) при разомкнутом ключе K напряжение на конденсаторе емкостью C равно $5\mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ – ЭДС батареи. Какой максимальный ток будет течь через катушку индуктивностью L после замыкания ключа? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

4. При разомкнутом ключе K в контуре (рис.12) происходят незатухающие колебания тока. В тот момент, когда ток в цепи максимален и равен I_0, замыкают ключ K. Определите максимальное напряжение на конденсаторе после замыкания ключа. Параметры схемы указаны на рисунке.

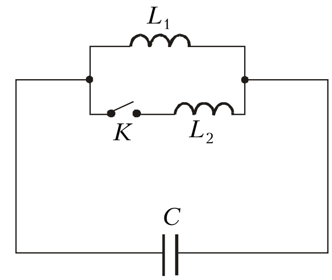

Рис. 12

Прямые и параболы

Б.ПИСАРЕВСКИЙ

ПРОСТЕЙШИЕ ИЗ ИЗУЧАЕМЫХ В ШКОЛЕ ФУНКЦИЙ – это линейная $y = kx + b$ и квадратичная $y = ax^2 + bx + c$. Графики этих функций – невертикальная прямая и парабола – хорошо известны. Поскольку для параболы $y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ ненулевой коэффициент a перед скобкой означает только растяжение графика вдоль оси Oy, будем считать, что $a = 1$, и в дальнейшем рассматривать параболу

$$y = x^2 + px + q. \qquad (1)$$

Парабола и прямая

Исследуем взаимное расположение прямой и параболы. Из системы уравнений

$$\begin{cases} y = kx + b, \\ y = x^2 + px + q \end{cases}$$

исключением y приходим к квадратному уравнению

$$x^2 + (p - k)x + (q - b) = 0 \qquad (2)$$

с дискриминантом $D = (p - k)^2 - 4(q - b)$. При $D < 0$ прямая и парабола не пересекаются (рис.1,*а*), при $D > 0$ точек пересечения две (рис.1,*б*). Если $D = 0$ и x_0 является единственным корнем уравнения (2), то в левой части (2) – полный квадрат, поэтому $p - k = -2x_0$, $q - b = x_0^2$, откуда $k = p + 2x_0$, $b = q - x_0^2$, и уравнение прямой, имеющей с параболой единственную общую точку с абсциссой x_0, запишется так:

$$y = (p + 2x_0)x + q - x_0^2. \qquad (3)$$

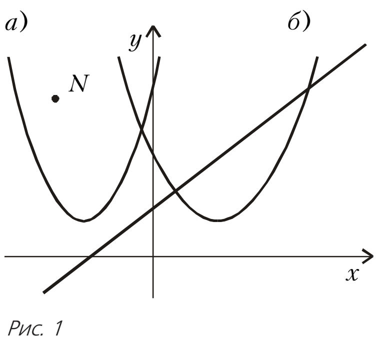

Рис. 1

Вспомним, что если на графике функции $y = f(x)$ взята точка M с абсциссой x_0, то уравнение

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (4)$$

определяет касательную к графику, проведенную в точке M. Если в (4) взять $f(x) = x^2 + px + q$, то мы получим уравнение (3) (проверьте!). В итоге прямая, имеющая с параболой единственную общую точку, оказывается касательной к параболе, проведенной в этой точке (рис. 2,*а*).

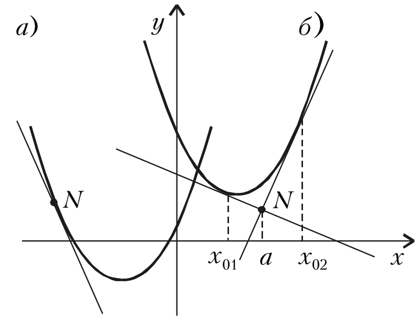

Рис. 2

Рассмотрим теперь следующую задачу: *сколько существует прямых, касающихся параболы (1) и проходящих через данную точку плоскости N(a; b)*?

Касательная должна проходить через N, поэтому $b = (p + 2x_0)a + q - x_0^2$. Относительно неизвестной абсциссы точки касания x_0 получаем квадратное уравнение $x_0^2 - 2ax_0 + (b - pa - q) = 0$ с дискриминантом $D = 4\left(a^2 + pa + q - b\right)$.

Уравнение не имеет корней, если $D < 0$, т.е. $b > a^2 + pa + q$, в этом случае точка N лежит внутри параболы, и естественно, что через N нельзя провести ни одной касательной (см. рис.1,*а*).

При $D > 0$, т.е. при $b < a^2 + pa + q$, через N проходят две прямые, касательные к параболе. Если обозначить через x_{01} и x_{02} различные корни квадратного уравнения, то по теореме Виета $x_{01} + x_{02} = 2a$. Это означает, что точка a на оси Ox – середина отрезка $[x_{01}; x_{02}]$ (рис.2,*б*).

Случай $D = 0$, когда точка N лежит на параболе, означает, что $x_0 = a$, т.е. точка касания совпадает с N и касательная единственна (см. рис.2,*а*).

Кубическая парабола

График функции

$$y = f(x) = x^3 + px^2 + qx + r \qquad (5)$$

будем называть кубической параболой. Как и выше, коэффициент при старшей степени x мы взяли равным единице. Для начала выясним, как может выглядеть эта кривая, ведь в обычном школьном курсе ограничиваются случаем $p = q = r =$