находиться посередине дуги AEB, т.е. в точке C, при этом $\alpha=\beta$.

Теперь исследуем характер экстремума. Возьмем вторую производную от искомой длины по углу:

$$\left.\frac{d^2 l_{AEB}}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=45^\circ} = 2R\left(-\cos 45^\circ - \sin 45^\circ\right) = -2\sqrt{2}\,R < 0 .$$

Отрицательный знак второй производной показывает наличие максимума – свет выбирает наидлиннейшую из возможных траекторий:

$$l_{ACB} > l_{AEB} .$$

Пример 3. *Докажем, что при отражении от вогнутой эллипсоидной поверхности выполняется закон отражения $\alpha=\beta$ при переходе света из фокуса A эллипса к фокусу B (рис. 5; точка C может быть выбрана произвольно, CN – перпендикуляр к касательной в точке отражения; заслонка D исключает прямое попадание света из A в B). Реализуется ли условие экстремума в этом случае?*

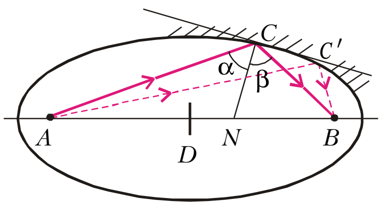

Рис. 5

Опустим из точки A перпендикуляр на касательную и продолжим его на расстояние $LA' = AL$ (рис.6). Соединим произвольную точку эллипса E с точкой A'. Треугольник ALE равен треугольнику $A'LE$ (как два прямоугольных треугольника с равными катетами), отсюда $\alpha=\alpha'$ и $A'E = AE$. Тогда

$$l_{A'EB} = l_{AEB} = 2a ,$$

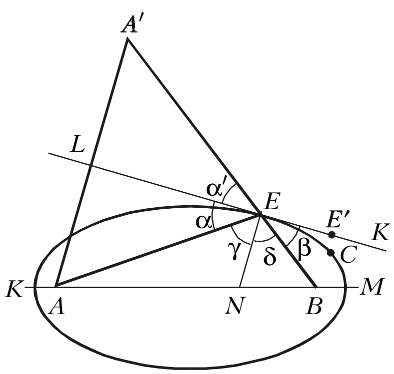

Рис. 6

где a – большая полуось эллипса. Ломаная линия AEB, соединяющая точки A и B через точку касания E, является кратчайшей линией, т.е. $l_{AEB} < l_{AE'B}$, поэтому также линия $A'EB$ является кратчайшей, соединяющей точки A' и B. А такой линией является прямая. На основе теоремы о накрест лежащих углах получаем $\alpha' = \beta$, но $\alpha'=\alpha$, отсюда $\alpha=\beta$, а также

$$\gamma = \delta$$

– угол падения равен углу отражения.

Поскольку условие эллипса $r_1 + r_2 = AE + EB = 2a = \text{const}$ выполняется для всех его точек, то

$$l_{AEB} = l_{ACB} = \text{const} ,$$

значит, в данном случае не существует экстремума.

Подведем некоторый итог. Во всех трех примерах общим требованием для выполнения закона отражения света является равенство нулю первой производной длины траектории луча по отклонению от истинной траектории в ту или иную сторону. Это отклонение может быть выражено углом поворота (пример 2) или смещением точки падения луча вдоль отражающей поверхности (примеры 1 и 3). Условие это называется условием стационарности. При этом может быть или минимум, или максимум, или не быть ни того ни другого.

Преломление света

Пример 4. *а) Докажем, что время распространения света через плоскую границу раздела двух сред из точки A (в среде, где скорость света v_1) в точку B (где его скорость v_2) минимально на такой траектории ACB (рис.7), для которой выполняется закон преломления* $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{v_1}{v_2} = const$.

б) Выведем закон преломления света, исходя из того, что время его распространения между фиксированными точками A и B при преломлении на плоской границе раздела будет минимальным.

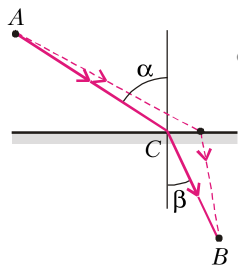

Рис. 7

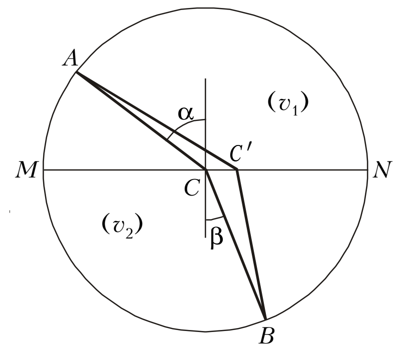

Рис. 8

а) Построим круг произвольного радиуса (рис.8). Изобразим его диаметр MN, разделяющий две среды: сверху находится оптически менее плотная среда, снизу – более плотная ($v_1 > v_2$). Отметим наши точки A и B и проведем две ломаные: через центр C круга, при этом α и β – углы падения и преломления света – связаны соотношением

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = \text{const} ,$$

и через произвольную точку C'. Надо доказать, что время прохождения светом пути ACB меньше времени прохождения пути $AC'B$. Предоставляем читателям сделать это самостоятельно.

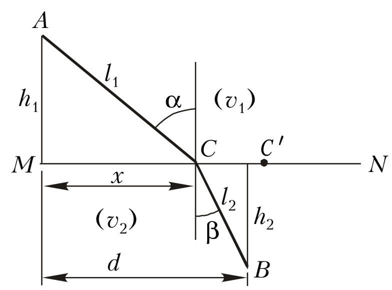

Рис. 9

б) Пусть точка C является подвижной точкой, при движении которой вдоль плоской границы раздела двух сред меняется время перехода из точки A в точку B (рис.9). Из рисунка находим

$$t_{ACB} = t_{AC} + t_{CB} = \frac{AC}{v_1} + \frac{CB}{v_2} = \frac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + h_2^2}}{v_2} .$$

Необходимое условие минимума (стационарности) запишем в виде

$$\frac{dt}{dx} = 0 ,$$

откуда получим

$$\frac{x}{v_1\sqrt{x^2 + h_1^2}} - \frac{d-x}{v_2\sqrt{(d-x)^2 + h_2^2}} = 0 ,$$

или

$$\frac{x}{v_1 l_1} - \frac{d-x}{v_2 l_2} = 0 .$$

Так как

$$\frac{x}{l_1} = \sin\alpha \quad \text{и} \quad \frac{d-x}{l_2} = \sin\beta ,$$