Принцип Ферма

А.СЕНДЕРИХИН

Французский математик Пьер Ферма приблизительно в 1660 году сформулировал основной принцип геометрической оптики, называемый теперь принципом Ферма. Согласно этому принципу, из всех возможных путей между двумя точками свет выбирает тот, по которому время прохождения наименьшее. Отсюда следуют все основные законы геометрической оптики. Действительно, в однородной среде свет должен распространяться прямолинейно, поскольку прямая – это кратчайшее расстояние между двумя точками, и, следовательно, время распространения наименьшее. Если же свет падает на границу раздела двух оптически различных сред (сред с разными показателями преломления, или с разными скоростями распространения света), то выполняются законы отражения и преломления света, которые тоже непосредственно вытекают из принципа Ферма.

В более строгой формулировке принцип Ферма представляет собой так называемый вариационный принцип, утверждающий, что свет распространяется от одной точки к другой по линии, вдоль которой время его прохождения экстремально, т.е. или минимально, или максимально, или одинаково по сравнению с временами прохождения вдоль всех других линий.

Обсудим несколько конкретных примеров, иллюстрирующих принцип Ферма.

Отражение света

Пример 1. *Рассмотрим отражение света от плоского зеркала (рис.1; заслонка D исключает прямое попадание света из A в B). а) Докажем, что при выполнении закона отражения* $\angle ACD = \alpha = \beta = \angle DCB$ *свет распространяется по кратчайшей из возможных траекторий, а именно по линии ACB. б) Выведем закон отражения света, исходя из того, что свет, отразившись от зеркала, распространяется по кратчайшей траектории.*

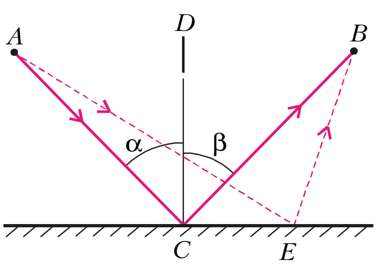

Рис. 1

а) Выполним дополнительное построение (рис.2): отметим на продолжении перпендикуляра AM отрезок $MA' = AM$ и соединим точку A' с точками C и E. Поскольку $\Delta ACM = \Delta A'CM$ (как два прямоугольных треугольника с равными катетами), то $\angle ACM = \angle A'CM$. Так же $\Delta ACM = \Delta BCM'$, откуда $\angle ACM = \angle BCM'$.

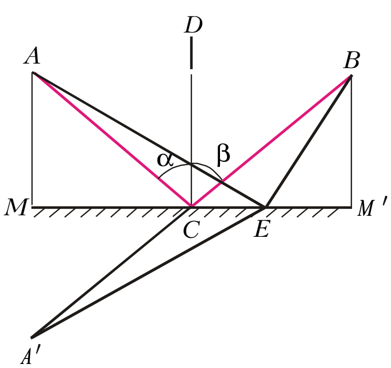

Рис. 2

Значит, $\angle A'CM = \angle BCM'$. На основе обратной теоремы о накрест лежащих углах получаем, что линия $A'CB$ – прямая, т.е. кратчайшая линия. Но $A'C = AC$ и $AE = A'E$, следовательно,

$$l_{ACB} < l_{AEB} .$$

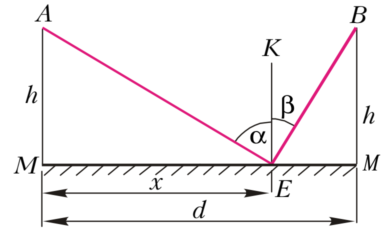

Рис. 3

б) Пусть точка E свободно движется вдоль MM' (рис.3). Когда длина линии AEB становится минимальной, выполняется закон отражения, т.е. $\angle AEK = \angle BEK$. Действительно, из рисунка 3

$$l_{AEB} = l_{AE} + l_{EB} = \sqrt{x^2 + h^2} + \sqrt{(d-x)^2 + h^2} .$$

Запишем необходимое условие минимума:

$$\frac{dl_{AEB}}{dx} = 0 ,$$

или

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2 + h^2} + \sqrt{(d-x)^2 + h^2}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} - \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+h^2}} = \frac{x}{l_1} - \frac{d-x}{l_2} = 0 .$$

Но

$$\frac{x}{l_1} = \sin\alpha \text{ и } \frac{d-x}{l_2} = \sin\beta ,$$

поэтому

$$\sin\alpha = \sin\beta , \text{ и } \alpha = \beta .$$

Что экстремум будет именно минимумом, можно показать взятием второй производной или каким-либо еще способом.

Пример 2. *Пусть свет отражается от вогнутого сферического зеркала, выполненного в виде полусферы радиусом R. Выведем закон отражения света для этого случая при условии, что свет, распространяясь от точки A к точке B, выбирает экстремальную по длине траекторию (рис.4; заслонка D исключает прямое попадание света из A в B). Исследуем характер этого экстремума.*

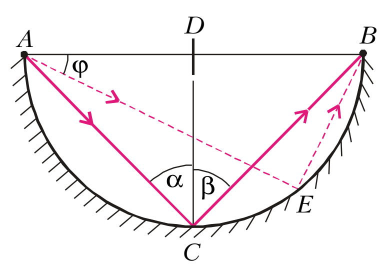

Рис. 4

Согласно рисунку 4,

$$l_{AEB} = l_{AE} + l_{EB} = 2R\cos\varphi + 2R\sin\varphi ,$$

т.е. искомая длина является функцией угла φ. Условие экстремума реализуется при

$$\frac{dl_{AEB}}{d\varphi} = 0 ,$$

или

$$\frac{d}{d\varphi}(2R\cos\varphi + 2R\sin\varphi) = 2R(-\sin\varphi + \cos\varphi) = 0 ,$$

откуда получаем

$$\sin\varphi = \cos\varphi , \text{ и } \varphi = 45^\circ .$$

Это означает, что точка E при истинной траектории должна