M1851. *Нарисованы координатные оси Ox, Oy и график функции $y = \frac{1}{8x}$. Масштаб не указан. Пользуясь только циркулем, постройте точку (1; 1).*

Пусть окружность с центром O пересекает положительную ветвь гиперболы в точках $M\left(a; \frac{1}{8a}\right)$ и $N\left(\frac{1}{8a}; a\right)$. Тогда

$$MN^2 = \left(a - \frac{1}{8a}\right)^2 + \left(\frac{1}{8a} - a\right)^2 = 2\left(a^2 + \frac{1}{64a^2}\right) - \frac{1}{2}.$$

Эта же окружность пересекает оси координат в точках $M'\left(\sqrt{a^2 + \frac{1}{64a^2}}; 0\right)$ и $N'\left(0; \sqrt{a^2 + \frac{1}{64a^2}}\right)$, откуда

$$M'N'^2 = 2\left(a^2 + \frac{1}{64a^2}\right) \text{ и } M'N'^2 - MN^2 = \frac{1}{2}.$$

Итак, мы можем построить две точки, которые служат концами отрезка длины $\sqrt{\frac{1}{2}}$. После чего легко построить точку (1; 1), опять-таки пользуясь только циркулем.

С.Токарев

M1852. *Дано натуральное число n. В интервале $\left(n^2; n^2 + n\right)$ выбраны различные натуральные числа a и b. Докажите, что в этом интервале нет натуральных делителей числа ab, отличных от a и b.*

Пусть d – натуральный делитель числа ab из интервала $\left(n^2; n^2 + n\right)$. Так как ab делится на d, то число $(a-d)(b-d)$ тоже делится на d. Поскольку a, b и d лежат в интервале длины n, имеют место неравенства $|a-d| < n$ и $|b-d| < n$, откуда можно заключить, что $|(a-d)(b-d)| < n^2 < d$.

Итак, число $(a-d)(b-d)$ делится на d и по модулю меньше d, следовательно, оно равно нулю. Значит, $d = a$ или $d = b$.

С.Иванов

M1853. *С числом разрешается производить следующие операции:*
1) возвести в любую натуральную степень;
2) отрезать последние две цифры, умножить образованное ими число на 3 и прибавить к числу, образованному остальными цифрами.
Можно ли с помощью таких операций из числа 81 получить число 82?

Рассмотрим число $n = 100a + b$, где b – число, образованное последними двумя цифрами числа n. Вторая операция переводит число n в число $n_1 = a + 3b$. Заметим, что $3n - n_1 = 299a$ делится на 13. Следовательно,

$$n_1 \equiv 3n \pmod{13},$$

т.е. вторая операция по модулю 13 – это умножение числа на 3. Поскольку исходное число равно $81 = 3^4$, то после применения обеих операций в любой последовательности и в любом количестве наше число будет сравнимо по модулю 13 с некоторой степенью числа 3. Однако степени тройки дают при делении на 13 только остатки 3, 9 и 1 и не дают остатка 4, а $82 \equiv 4 \pmod{13}$. Следовательно, число 82 не может быть получено с помощью указанных операций.

К.Кохась

M1854*. *Пусть $f(x)$ – многочлен степени $m \ge 2$ с целыми коэффициентами. Докажите, что множество значений многочлена $f(x)$ в целых точках содержит бесконечную геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $f(x) = a(bx + c)^m$ (где a, b, c – целые числа, $a \ne 0$, $b \ne 0$).*

Сначала убедимся в том, что множество значений многочлена

$$f(x) = a(bx + c)^m$$

(a, b, c – целые числа, $a \ne 0$, $b \ne 0$) в целых точках содержит некоторую бесконечную геометрическую прогрессию. Мы можем считать, что $\text{НОД}(b, c) = 1$. Выберем целое число x_0 так, чтобы $d = bx_0 + c > 1$. Ясно, что $\text{НОД}(d, b) = 1$. Пусть e – какое-нибудь натуральное число, для которого d^e при делении на b дает в остатке 1. Поскольку $\text{НОД}(d, b) = 1$, то такое число обязательно существует: можно, например, взять $e = \varphi(b)$, где $\varphi(b)$ – функция Эйлера (см. статью В.Сендерова и А.Спивака «Малая теорема Ферма» в «Кванте» №1 за 2000 год). Положим

$$x_n = x_0 + \frac{d\left(d^{en} - 1\right)}{b}.$$

Так как $d^e - 1$ делится на b, то для любого $n = 0, 1, \ldots$ число x_n целое. Имеем

$$f(x_n) = a(bx_n + c)^m = Aq^n,$$

где $A = ad^m$, $q = d^{em}$. Тем самым указанное свойство установлено.

Пусть теперь

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

– многочлен степени $m \ge 2$ с целыми коэффициентами, множество значений которого в целых точках содержит некоторую бесконечную геометрическую прогрессию. Рассмотрим многочлен

$$f_1(y) = (ma_m)^m f\left(\frac{y - a_{m-1}}{ma_m}\right) = a_m y^m + g(y),$$

где $g(y)$ – многочлен с целыми коэффициентами, $g(y) = 0$ либо $\deg g(y) \le m - 2$. Множество значений многочлена $f_1(y)$ в целых точках также содержит бесконечную геометрическую прогрессию (это следует из равенства $f_1(y) = (ma_m)^m f(x)$, где $y = a_{m-1} + ma_m x$). Покажем, что тогда многочлен $g(y)$ обязан быть нулевым.

Допустим, что $g(y) \ne 0$, а для некоторой последовательности целых чисел y_n и целых чисел A и q имеем

$$f_1(y_n) = Aq^n \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

при этом $A \ne 0$, $|q| > 1$. Очевидно, что $|y_n| \to \infty$ ($n \to \infty$). Далее мы будем считать, что числа a_m, A и q положительны (остальные случаи сводятся к этому).