равносильно неравенству

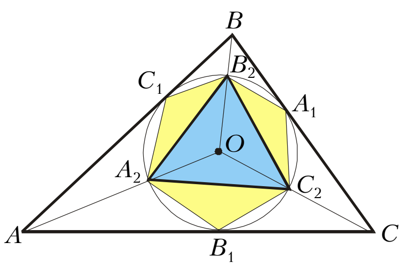
$$(a-b)^2 > 0$$

и потому справедливо для любых различных чисел $a \neq b$. А вечно уменьшаться сумма квадратов не может (ибо не существует бесконечной убывающей последовательности целых неотрицательных чисел).

Замечание. Для 10 банок и 100 пауков утверждение задачи неверно: если в 8 банках сидят по 11 пауков, а в остальных двух – по 6 пауков, то ничего с ними не поделаешь!

В. Каскевич

М1848. *В треугольник ABC вписана окружность с центром O, которая касается сторон в точках A_1, B_1, C_1 (см. рисунок). Отрезки AO, BO, CO пересекают окружность в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что площадь треугольника $A_2B_2C_2$ равна половине площади шестиугольника $B_1A_2C_1B_2A_1C_2$.*



Свое пристальное внимание обратим на три треугольника: $A_2B_2C_1$, $B_2C_2A_1$ и $C_2A_2B_1$. Во-первых, каждые два из них имеют по паре равных сторон: $B_2C_1 = B_2A_1$, $C_2A_1 = C_2B_1$ и $A_2B_1 = A_2C_1$. Во-вторых, легко видеть, что сумма углов при вершинах A_1, B_1 и C_1 у этих треугольников равна 360°, поскольку общая сумма дуг окружности, на которые эти углы опираются, равна 720°.

Ввиду этих двух обстоятельств из названных трех треугольников, прикладывая их друг к другу равными сторонами, можно сложить один больший треугольник; при этом вершины A_1, B_1 и C_1 сольются в одну точку. Так построенный треугольник имеет те же по величине стороны, что и старый треугольник $A_2B_2C_2$, а значит, равен ему. Впрочем, нам достаточно, что их площади равны – отсюда следует, что утверждение задачи справедливо.

В.Произволов

М1849. *Простое число p удовлетворяет равенству*

$$p^2 = 2^n \cdot 3^m + 1,$$

где n и m – целые неотрицательные числа. Докажите, что $p \le 17$.

Легко видеть, что при всяком простом $p > 3$ число $p^2 - 1$ делится на 2 и на 3 (и даже на 24). Докажем, что при $p > 17$ число $p^2 - 1$ обязательно имеет и простой делитель, больший 3.

Предположим противное. Тогда числа $p - 1$ и $p + 1$ равны, в некотором порядке, числам $2 \cdot 3^t$ и 2^k.

Первый случай. $p + 1 = 2^k$. Число $2^n - 1$ при четном $n > 2$ разлагается в произведение $2^n - 1 = \left(2^{n/2} - 1\right)\left(2^{n/2} + 1\right)$ двух взаимно простых множителей и поэтому имеет не менее двух различных нечетных простых делителей. Следовательно, при $k > 3$ последним свойством обладает хотя бы одно из чисел $2^k - 1$ и $2^k - 2 = 2\left(2^{k-1} - 1\right)$.

Второй случай. $p + 1 = 2 \cdot 3^k$, откуда $2^{k-1} + 1 = 3^t$. При $k > 2$ число t четно, так как в противном случае правая часть давала бы остаток 3 при делении на 4. Значит, $\left(3^{t/2} + 1\right)\left(3^{t/2} - 1\right)$ есть степень двойки. Второй сомножитель обязан равняться 2. Получили: $t = 2$, так что $p + 1 = 18$, т.е. $p = 17$.

В.Сендеров

М1850. *Числа натурального ряда от 1 до $n(n+1)$ записаны последовательно красным и синим цветом в следующей очередности. Первые n чисел – красные, затем одно – синее, затем n – 1 чисел – красные, затем два – синие и т.д., наконец, одно число – красное и последние n чисел – синие. Таким образом, убывающие по численности группы красных чисел перемежаются возрастающими по численности группами синих чисел. Докажите, что сумма синих чисел вдвое больше суммы красных чисел.*

Математическая индукция является естественным методом решения этой задачи. Однако нужно найти такой вариант ее применения, который освободит нас от запутанных комбинированных вычислений.

Сумма всех натуральных чисел от 1 до $n(n+1)$ равна

$$\frac{n(n+1)\left(n^2+n+1\right)}{2}.$$

Чтобы доказать утверждение задачи, достаточно убедиться в том, что сумма синих чисел равна

$$\frac{n(n+1)\left(n^2+n+1\right)}{3}.$$

Убедимся в этом.

Для начальных значений n это проверяется непосредственно, поэтому перейдем к заключительному шагу индукции. При переходе от n к $n + 1$ сумма синих чисел прирастает на

$$\left(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right) +$$

$$+ \left((n+1)^2 + 1 + (n+1)^2 + 2 + \ldots + (n+1)^2 + n + 1\right),$$

или на

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^3 + \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Обозначим это число через Δ.

Но простые выкладки приводят к равенству

$$\frac{n(n+1)\left(n^2+n+1\right)}{3} + \Delta =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)\left((n+1)^2 + (n+1) + 1\right)}{3},$$

что и требовалось показать.

В.Произволов