Поясним, что это значит.

Представим себе нашу плоскость в несколько ином виде (чтобы переход к конечномерному и бесконечномерному случаям был вполне естественным). Выделим на плоскости точку и обозначим ее буквой O. Точкам плоскости дадим другое название, будем говорить, что это векторы, и будем обозначать их малыми буквами из конца латинского алфавита. Числа будем обозначать греческими буквами. Вектор, соответствующий точке O, будем называть нулевым и обозначать цифрой 0.

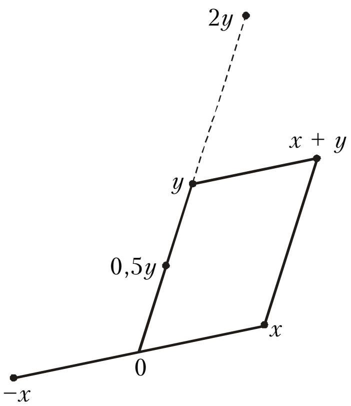

Рис.13. Векторы

Векторы можно складывать «по правилу параллелограмма» и естественным образом умножать на числа (рис.13). В частности, противоположный вектор – это вектор, умноженный на минус единицу. При этом легко проверяются различные свойства, вроде «от перемены мест слагаемых сумма не меняется». Выпишем все же несколько таких свойств (далее x, y и z – произвольные векторы нашей плоскости):

1) $x+y=y+x$, 2) $(x+y)+z=x+(y+z)$, 3) $x+0=x$,
4) $x+(-x)=0$, 5) $1\cdot x=x$, 6) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$,
7) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$, 8) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

Но в точности такими же свойствами обладают многие другие объекты. Рассмотрим, например, совокупность полиномов степени не выше n. Их тоже можно складывать и умножать на числа, и при этом будут удовлетворяться все свойства 1) –8). Можно рассмотреть наше трехмерное пространство, выбрать на нем точку O (которую станем обозначать также и нулем), определить сложение векторов по правилу параллелограмма и умножение вектора на число естественным образом, и снова будут удовлетворяться свойства 1) – 8).

Еще один пример. Совокупность n-ок (упорядоченных наборов из n чисел) $x=(x_1;\ldots;x_n)$ с покоординатным сложением и покоординатным умножением на число также будет системой точек, удовлетворяющих свойствам 1) – 8). Это векторное пространство обозначают $\boldsymbol{R}^n$.

Если $n = 2$, то соответствие точек плоскости и пар $x=(x_1;x_2)$ осуществляется введением системы координат. Так строится *арифметическая модель* плоскости.

Любая совокупность точек, в которой определены операции сложения и умножения на числа со свойствами 1)–8), называется векторным пространством. При этом на плоскости любые два неколлинеарных вектора e_1 и e_2 обладают тем свойством, что любой вектор x через них «линейно выражается», т.е. представляется в виде $x=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2$. В нашем пространстве можно выбрать три таких вектора, и потому наше пространство называется трехмерным. А полиномы $t\to x(t)$ степени n являются линейными комбинациями $n+1$ полинома: $1, t, t^2, \ldots, t^n$. Векторное пространство таких полиномов $(n+1)$-мерно.

Но, как вы знаете, на плоскости можно ввести скалярное произведение, которое ставит в соответствие двум векторам $x=(x_1;x_2)$ и $y=(y_1;y_2)$ число

$$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2.$$

Аналогично, в трехмерном пространстве скалярное произведение векторов $x=(x_1;x_2;x_3)$ и $y=(y_1;y_2;y_3)$ равно

$$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3.$$

Скалярное произведение обладает следующими свойствами: а) $(x,x)\ge 0$ и равно нулю, лишь если $x=0$, б) $(x,y)=(y,x)$, в) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$, г) $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$. Все эти свойства для векторов на плоскости и в трехмерном пространстве доказываются безо всякого труда. А на пространстве полиномов можно определить скалярное произведение полиномов $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$ не геометрически, а аналитически, например так: $(x(\cdot),y(\cdot))=\int_0^1 x(t)y(t)\,dt$. Конечномерные векторные пространства со скалярным произведением, обладающим свойствами а) – г), называются *евклидовыми пространствами*. Евклидовым n-мерным пространством является пространство n-ок со скалярным произведением векторов $x=(x_1;\ldots;x_n)$ и $y=(y_1;\ldots;y_n)$, определяемых равенством $(x,y)=\sum_{i=1}^n x_iy_i$. Можно рассмотреть и векторное пространство бесконечных последовательностей $x=(x_1;x_2;\ldots)$ таких, что $\sum_{i=1}^\infty x_i^2<\infty$, с покоординатным сложением и покоординатным умножением на число. Получим векторное пространство, в котором вводится скалярное произведение векторов $x=(x_1;x_2;\ldots)$ и $y=(y_1;y_2;\ldots)$ по формуле $\sum_{i=1}^\infty x_iy_i$. Такое пространство обозначают l_2. Пространство l_2 не является конечномерным. Оно бесконечномерно. Бесконечномерные векторные пространства со скалярным произведением (и еще одним свойством полноты, определение которого просто, но все-таки за пределами наших интересов) называются *гильбертовыми пространствами*. В евклидовом и гильбертовом пространствах расстояние между точками x и y измеряется числом $d(x;y)=\sqrt{(x-y,x-y)}$, а значит, понятие замкнутого множества определяется аналогично тому, как это было сделано на плоскости. В гильбертовых пространствах доказывается, что существует точка, на которой достигается кратчайшее расстояние от точки, *не принадлежащей выпуклому замкнутому множеству, до точек этого множества.*

Вернемся к нашим теоремам. Если просмотреть их доказательства, то можно убедиться в том, что все результаты переносятся на конечномерный случай, а некоторые и на гильбертов.

Наряду с прямыми, в многомерных случаях основополагающую роль играют *гиперплоскости* – плоскости, перпендикулярные прямым (на плоскости понятия прямой и гиперплоскости совпадают, в трехмерном пространстве гиперплоскости – это привычные нам плоскости).

Формулировка и доказательство теоремы о строгой отделимости (теорема Мазура) почти полностью сохраняются. В определении строгой отделимости и в формулировке теоремы надо слово «прямая» заменить на слово «гиперплоскость», и тогда само доказательство можно проводить в точности по той же схеме, что на плоскости. А именно, надо найти наиближайшую к точке B точку C из множества $\boldsymbol{A}$, провести гиперплоскость, проходящую через C перпендикулярно прямой, соединяющей точку B с C, и далее повторить доказательство плоской теоремы, сведя все к плоскому случаю (для этого надо провести плоскость через B, C и D и рассуждать далее только в этой плоскости).

Формулировка и доказательство теоремы Минковского не требуют изменений.