и смог вернуться в Австрию только в 1921 году. Доказательство Хелли этой теоремы вышло в свет лишь в 1923 году. А Радон нашел другое доказательство, основанное на его собственной теореме. Радоновское доказательство теоремы Хелли вышло из печати в 1915 году.

Теорема Фенхеля – Моро

Перейдем теперь к теории выпуклых функций. Будем рассматривать функции одного переменного. Проведем на нашей евклидовой плоскости горизонтальную прямую и перпендикулярную ей вертикальную прямую. Точку пересечения этих прямых обозначим буквой O. Прямые на плоскости делятся на две группы: те, которые пересекают вертикальную прямую, и те, которые ей параллельны. Невертикальные прямые, проходящие через точку O, – это графики линейных функций (рис.10). А вообще невертикальные прямые на плоскости – это графики функций, которые называют аффинными. Любое множество на плоскости, которое вместе с любой своей точкой содержит весь луч, исходящий из этой точки и идущий параллельно вертикальной прямой «вверх», называется надграфиком функции f, которая каждой точке вертикальной прямой ставит в соответствие нижнюю точку $f(x)$ надграфика, проектирующуюся в заданную точку x. Функция называется выпуклой, если ее надграфик – выпуклое множество, и замкнутой, если он – замкнутое множество.

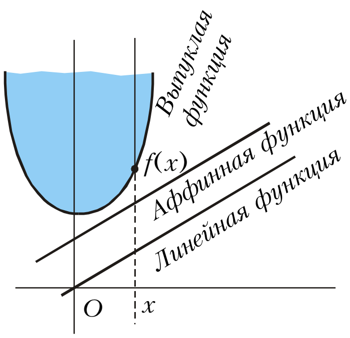

Рис.10. Что такое выпуклая функция

Упражнение 6. Приведите пример функции с выпуклым, но не замкнутым надграфиком.

Имеет место следующая важная теорема – одна из основных в выпуклом анализе функций.

Теорема (Фенхель –Моро). *Для того чтобы надграфик функции был пересечением надграфиков аффинных функций, необходимо и достаточно, чтобы сама функция была выпуклой и замкнутой.*

Эта теорема была доказана в конечномерном случае немецким математиком В.Фенхелем в 1949 году, а в бесконечномерном случае – французским математиком Ж.Моро в 1960 году.

Доказательство. В одну сторону теорема следует из определений: если надграфик функции является пересечением надграфиков аффинных функций, надграфик функции выпуклый и замкнутый.

Если надграфик пуст (на языке функций это означает, что функция принимает значение, тождественно равное бесконечности), то утверждение теоремы очевидно: надо взять в качестве аффинных функций всевозможные константы (их графики параллельны горизонтальным прямым). Пусть надграфик $\boldsymbol{A}$ непуст и точка B принадлежит его границе. Тогда можно взять точку B' на той же вертикальной прямой, что и B, но «ниже» (рис.11). Прямая $\boldsymbol{H}_0$, строго отделяющая B' от $\boldsymbol{A}$, не может быть вертикальной (ибо вертикальная прямая, проходящая через точку B', проходит и через B, а надо, чтобы они были строго отделены). Значит, она – график аффинной функции.

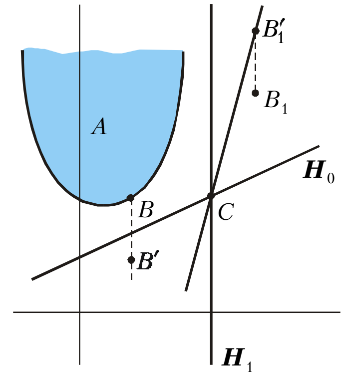

Рис.11. Теорема Фенхеля–Моро

Предположим теперь, что надграфик $\boldsymbol{A}_1$ функции, являющейся пересечением надграфиков аффинных функций, расположенных под множеством $\boldsymbol{A}$ (ясно, что он содержит $\boldsymbol{A}$), не совпадает с $\boldsymbol{A}$. Следовательно, существует точка B_1 из $\boldsymbol{A}_1$, не принадлежащая $\boldsymbol{A}$. Прямая $\boldsymbol{H}_1$, отделяющая B_1 от $\boldsymbol{A}$, не может быть графиком аффинной функции, ибо тогда получалось бы противоречие с построением множества $\boldsymbol{A}_1$. Значит, она вертикальна. Прямая $\boldsymbol{H}_0$ не может лежать «над» точкой B_1 (ибо тогда мы пришли бы к тому же противоречию). Так как прямая $\boldsymbol{H}_0$ невертикальна, она пересекает вертикальную прямую (невертикальная прямая не может быть параллельна вертикальной). Пусть C – точка пересечения $\boldsymbol{H}_0$ и $\boldsymbol{H}_1$. Возьмем точку B_1' «выше» B_1 и проведем прямую через C и B_1'. Она невертикальна и лежит под $\boldsymbol{A}$ выше B_1. Противоречие доказывает теорему.

Заключительные замечания

1. При выводе теоремы Фенхеля – Моро нам, по сути дела, удалось доказать больше, чем мы обещали. Рассмотрим ту же плоскость с горизонтальной осью (на этот раз числовой) и вертикальной осью, проходящей через начало координат. В качестве аффинных функций рассмотрим суммы экспонент $C_1e^x + C_2e^{-x}$. Нетрудно убедиться в том, что это семейство функций имеет много свойств обычных аффинных функций. В частности, через любые две точки плоскости проходит единственная «экспоненциальная» аффинная функция. Естественным образом определяется «экспоненциально выпуклая функция» (т.е. функция, надграфик которой вместе с двумя точками содержит весь «экспоненциальный отрезок», соединяющий эти точки). Невыпуклое в обычном смысле множество – надграфик функции $y = e^x - e^{-x}$ (рис.12) – экспоненциально выпукло. Если же проанализировать наше доказательство, то можно убедиться, что доказан следующий результат: *для того чтобы функция была верхней гранью экспоненциально аффинных, необходимо и достаточно, чтобы она была экспоненциально выпуклой и замкнутой.*

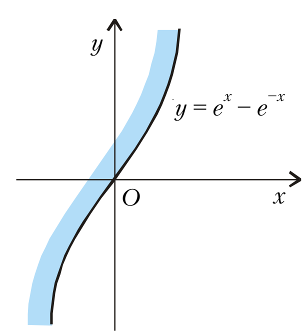

Рис. 12. Экспоненциально выпуклое множество

2. Нами были доказаны некоторые теоремы плоской выпуклой геометрии. Следует сказать при этом, что почти без изменений доказательства переносятся на конечномерный евклидов случай любой размерности, а некоторые результаты – на бесконечномерный случай.