Множество $\boldsymbol{A}$ на плоскости называется *открытым*, если для любой точки A из $\boldsymbol{A}$ найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что все точки плоскости, находящиеся на расстоянии меньшем ε от A, принадлежат $\boldsymbol{A}$. Множество, дополнение к которому открыто, называется *замкнутым.*

Упражнение 1. Докажите, что круг без ограничивающей его окружности (т.е. множество точек, находящихся на расстоянии меньшем r от некоторой точки на плоскости) – открытое множество, а круг радиуса r с центром в A замкнут.

Любая прямая разбивает плоскость на две открытые полуплоскости и саму прямую. Но мы, употребляя слово «полуплоскость», будем иметь в виду (если другого не оговорено) открытую полуплоскость с присоединенной к ней прямой.

Упражнение 2. Докажите, что такие полуплоскости замкнуты.

Ограниченные (т.е. содержащиеся в некотором круге) замкнутые множества на плоскости называются *компактами.*

Этих сведений должно нам хватить, чтобы построить начала теории выпуклости на плоскости.

Андрей Николаевич Колмогоров, великий ученый, столетие которого отмечается в нынешнем году, последние годы своей жизни посвятил школьному математическому образованию. Он задумал преобразовать школьный курс геометрии. Его замысел я (как мне кажется) понял лишь тогда, когда Андрея Николаевича не стало. По моему мнению, ему захотелось описать евклидову плоскость наглядно и точно. В его наглядном описании соединились старинное воззрение самого Евклида, когда плоскость – это плоскость школьной доски, на которой можно совершать построения при помощи линейки и циркуля, т.е. проводить прямые через две точки, измерять расстояния, проводить окружности заданного радиуса, словом, делать то, что обычно делают в школе, и новые воззрения, идущие от Эрлангенской программы Феликса Клейна. Согласно Эрлангенской программе, евклидова плоскость характеризуется группой движений (т.е. изометрических преобразований).

Суть движений легко представить себе наглядно, приложив прозрачное стекло к школьной доске. Если на доске нарисована какая-то фигура (скажем, треугольник), ее можно скопировать на стекло, потом стекло можно переместить в другое место и скопировать чертеж опять на доску. Получится изометрическое (сохранившее все расстояния) преобразование фигуры. Стекло можно «перевернуть», и тогда нарисованная фигура окажется симметричной исходной. Примерами движений являются параллельные переносы, повороты вокруг некоторой точки плоскости, симметрии относительно прямой.

Дополнив Евклида Клейном (т.е. оперируя с понятием движения), можно по-новому доказывать многие теоремы и по-другому решать различные геометрические задачи.

Скажем, одну из первых теорем геометрии (приписываемую Фалесу) о равенстве углов при основании в равнобедренном треугольнике можно, применяя идею движения (так сказать, «с помощью стекла»), доказать так: скопируем треугольник на стекло, потом перевернем его и скопированный образ снова приложим к треугольнику. Два треугольника на доске (изначальный и скопированный с перевернутого стекла) наложатся друг на друга, а значит, углы при основании равны (ибо они «поменялись местами»).

Все сказанное относится к наглядному описанию плоскости.

Точное же описание плоскости возможно с помощью введения координат с последующей алгебраизацией (об этом будет вкратце сказано в конце). Но возможно и аксиоматическое точное описание плоскости. Аксиоматическое описание плоскости начинал Евклид, а завершил великий математик прошлого века Давид Гильберт (1862–1943).

Аксиоматика, придуманная Колмогоровым, не похожа на евклидо-гильбертовскую. Она достаточно проста и естественна. Аксиоматизируются вполне наглядные свойства прямых, расстояний, отрезков, полупространств и движений (скажем, что через две точки проходит прямая и при том только одна, что расстояние симметрично и удовлетворяется аксиома треугольника, что существует ровно два движения, совмещающих отрезок с другим, равным ему по длине). А в заключение добавляется аксиома параллельности, согласно которой через точку, лежащую вне прямой, можно провести единственную прямую, ей параллельную. Причем, если эту аксиому заменить другой, придем к другой геометрии – геометрии Лобачевского.

Судя по некоторым высказываниям Андрея Николаевича, ему мечталось, что учителя, которые любят свой предмет, смогут на кружках и дополнительных занятиях раскрыть перед интересующимися школьниками мир различных геометрий, и прежде всего евклидов мир конечного и бесконечного числа измерений, мир геометрии Лобачевского, выпуклый мир Минковского, аффинный и проективный миры...

Чувствуя свой долг перед своим учителем, я хочу здесь наметить некоторые тропы возможных блужданий по этим мирам. Мы побродим в основной части статьи по плоскому миру выпуклых фигур, а в заключительной части – по конечномерному выпуклому евклидову миру, войдем в мир бесконечномерной геометрии, и в самом конце постараемся проникнуть в выпуклый мир плоской геометрии Лобачевского.

Все доказательства на евклидовой плоскости мы будем проводить геометрически, с помощью линейки, циркуля и воображения. У нас, скажем, нигде (кроме мелкого шрифта) не появятся ни числа, ни числовые функции. Эти доказательства настолько просты и естественны, что, вообще говоря, нет необходимости сопровождать их чертежами: каждый может взять карандаш и бумагу и, следуя моему изложению, изобразить все самостоятельно, что будет весьма полезно. Но «на всякий случай» мы помещаем всюду нужные чертежи. Глядя на них, можно убедить себя в верности теорем без логических рассуждений – чертеж дает наглядное доказательство.

Теорема о строгой отделимости

Определение. Скажем, что прямая $\boldsymbol{H}$ *строго отделяет множество* $\boldsymbol{A}$ *от точки* B, если $\boldsymbol{A}$ лежит в одной из полуплоскостей, ограниченных этой прямой, а B лежит в другой и не принадлежит $\boldsymbol{H}$ (иначе можно сказать, что B лежит в другой открытой полуплоскости; рис.3).

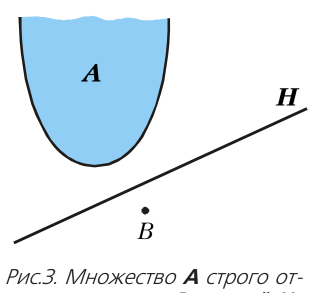

Рис.3. Множество $\boldsymbol{A}$ *строго отделено от точки B прямой* $\boldsymbol{H}$

Важнейшей теоремой всего выпуклого анализа (а не только выпуклой геометрии) является следующая теорема.