оремы Безу, многочлен $4a^3 + a - 1$ делится на $2a - 1$. Выполнив деление уголком, получим уравнение

$$(2a-1)\left(2a^2 - a + 1\right) = 0 .$$

Поскольку дискриминант квадратного трехчлена $2a^2 - a + 1$ отрицателен, то уравнение $2a^2 - a + 1 = 0$ решений не имеет, так что в рассматриваемом нами случае $a = b = 1/2$. При этом $c = 2a^2 = 1/2$.

Теперь рассмотрим случай $a + b = 1$. Если $a = c$ или $b = c$, то аналогично вышеизложенному находим $a = b = c = 1/2$. Если же $a \neq b$ и $b \neq c$, то, вычитая почленно из первого уравнения системы ($*$) третье, получаем $a + c = 1$, а вычитая из второго третье, получаем $b + c = 1$. Полученной системе уравнений

$$\begin{cases} a + b = 1, \\ a + c = 1, \\ b + c = 1 \end{cases}$$

удовлетворяет лишь известный нам набор $a = b = c = 1/2$.

Теперь, решив систему $yz = xz = xy = \frac{1}{2}$, находим ответ: $(x;\, y;\, z) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ или $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Но некоторые команды придумали решение задачи, основанное на неравенстве между средним арифметическим и средним геометрическим. Заметим, что все неизвестные должны быть одного знака: или все положительные, или все отрицательные. Пусть для определенности все неизвестные положительны. Тогда

$$x = \frac{\sqrt{yz}}{y + z} \leq \frac{1}{2} .$$

Аналогично, $y \leq \frac{1}{2}$ и $z \leq \frac{1}{2}$. Перемножив почленно все три уравнения системы, находим

$$(y+z)(z+x)(x+y) = 1 .$$

Если хотя бы одно из чисел x, y, z меньше $1/2$, а остальные положительны и не превышают $1/2$, то произведение $(y+z)(z+x)(x+y)$ меньше единицы. Поэтому иных решений в положительных числах, кроме $x = y = z = \frac{1}{2}$, система не имеет.

24. Если $n = 2$, то игра единственна и кончится она вничью. Если же $n \geq 3$, то как минимум две ничьи состоятся: самая первая встреча турнира кончится со счетом 0 : 0, а последняя – со счетом $(n-1):(n-1)$. Можно добиться того, чтобы никаких других ничейных встреч не было. Чтобы это сделать, применим индукцию. Для $n = 3$ расписание по сути единственно. Пусть для некоторого n расписание, при котором только две ничьи, уже составлено. Добавим к n «старым» командам одну «новую» команду N. Пусть сначала будут сыграны все игры между старыми командами, кроме последней, в которой должны были встретиться некоторые две старые команды A и B. Теперь пусть сыграют A и N, затем A и B, а потом пусть N сыграет (в любом порядке) все оставшиеся ей игры. Очевидно, ничья случится лишь в последней игре.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Нет, так как идея перпетуум мобиле предполагает неопределенно долгое совершение работы без изменения состояний тел, а такой работы в случае планет не совершается.

2. Нет, не так. Когда трубки расположатся под углом 45° к горизонту, ртуть окажется в нижних коленах, и система будет уравновешена.

3. Нет, поскольку на глубине для раздвигания поршней придется совершать дополнительную работу против сил гидростатического давления.

4. Те же силы поверхностного натяжения, что поднимали воду по капиллярам фитиля, не позволят ей стекать с верхнего его конца в сосуд.

5. Не изменится. По указанным в предыдущем решении причинам вода вытекать из трубки не будет.

6. Нет, так как не отпадет необходимость отводить значительное количество теплоты в холодильник.

7. Не может, иначе удалось бы осуществить цикл (рис.10), в котором все полученное системой тепло целиком перешло бы в работу. Такая машина была бы вечным двигателем II рода, который запрещен вторым началом термодинамики.

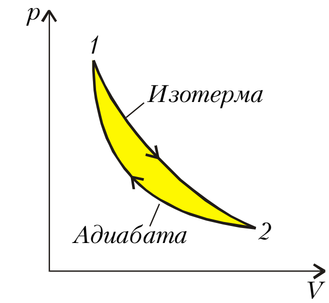

Рис. 10

8. Нет, процесс будет длиться до тех пор, пока не произойдет насыщение окружающей среды водяным паром.

9. Нельзя. Секрет действия игрушки – в ватной голове, которая периодически смачивается водой. Испарение воды приводит к понижению давления паров жидкости внутри ампулы, подъему жидкости в трубочке и переносу ее центра тяжести. Энергия, требуемая для наклонов птички, пополняется за счет внутренней энергии воды и окружающего воздуха.

10. Тока в проводнике не будет, так как разность потенциалов между обкладками конденсатора одинакова и в верхней, и в нижней его частях. Это происходит за счет перераспределения зарядов по обкладкам.

11. Нет, движение довольно быстро закончится из-за расходования энергии на преодоление трения в движущихся частях генератора и электродвигателя.

Потенциал электростатического поля

1. $\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$, $\varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$;

$\varphi_1^* = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$, $\varphi_2^* = 0$.

2. $\varphi(x) = \left(\frac{\varphi_0}{d} + \frac{d\rho}{2\varepsilon_0}\right)x - \frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0}$, где x отсчитывается от заземленной пластины.

3. Скорость среднего шарика (расположенного напротив пережигаемой нити) равна $u = \frac{q}{\sqrt{6\pi\varepsilon_0 ma}}$, скорости крайних шариков одинаковы и равны $v = -\frac{u}{2}$.

4. а) $\varphi = \varphi_1\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)$; б) $\varphi = \varphi_1\frac{R_1}{R_2}$.

Избранные задачи Санкт-Петербургской математической олимпиады

1. Так как сумма чисел делится и на 5, и на 4, то она делится на 20. Сумма всех чисел на карточках равна 61. Значит, осталась карточка с единицей.

2. а) Ослик возьмет две одинаковые палочки в качестве вертикальных сторон, а остальные палочки выложит в длинный отрезок, разделит его на две половины (сделав, если нужно,