откуда получаем $(S_1 - S_3)(S_2 - S_4) = 0$. Следовательно, $S_2 = S_4$ либо $S_1 = S_3$. В первом случае $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD}$, поэтому точки $C$ и $D$ находятся на одинаковом удалении от прямой $AB$; $AB \parallel CD$. Во втором случае аналогично доказывается, что $BC \parallel AD$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $ABCD$ – трапеция или параллелограмм. Для определенности положим $BC \parallel AD$ и обозначим $AD = a$, $BC = b$, $h$ – расстояние между прямыми $AD$ и $BC$. Тогда

$$S_{\triangle ABC} = \frac{bh}{2},\ S_{\triangle ACD} = \frac{ah}{2},\ S_{\triangle ABD} = \frac{ah}{2},\ S_{\triangle BCD} = \frac{bh}{2}.$$

Поэтому

$$S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle ACD} = \frac{abh^2}{4} = S_{\triangle ABD} \cdot S_{\triangle BCD}.$$

**14.** а) Полагая $m = 2k + 1$, $n = 2k$, где $k$ – натуральное число, получаем

$$5^m - 5^n = 5^{2k+1} - 5^{2k} = 5^{2k}(5-1) = \left(2 \cdot 5^k\right)^2,$$

т.е. среди чисел $5^m - 5^n$ сколь угодно много квадратов.

б) Предположим, что сумма $7^m + 7^n$ является квадратом некоторого натурального числа. Поскольку $7^m + 7^n = 7^n\left(7^{m-n} + 1\right)$ и числа $7^n$, $7^{m-n} + 1$ взаимно просты, то точными квадратами являются также числа $7^n$, $7^{m-n} + 1$. Отсюда следует, что $7^{m-n} + 1 = b^2$, где число $b$ натуральное, $b > 2$. Тогда $7^{m-n} = b^2 - 1 = (b-1)(b+1)$, и каждое из чисел $b - 1$, $b + 1$ является некоторой ненулевой степенью 7. Но этого не может быть, поскольку разность между числами $b + 1$ и $b - 1$ равна 2. Противоречие.

Пусть теперь $m = 3k + 1$, $n = 3k$. Тогда

$$7^m + 7^n = 7^n\left(7^{m-n} + 1\right) = 7^{3k} \cdot 8 = \left(2 \cdot 7^k\right)^3,$$

т.е. среди чисел $7^m + 7^n$ имеется сколь угодно много кубов.

**15.** Победу в игре может обеспечить себе начинающий. Допустим противное – что любой первый ход начинающего ведет его к поражению. Нам удобно будет пронумеровать столбики номерами от 61 до 70, в соответствии с исходным количеством монет. Проигрывающим является и такой первый ход начинающего, когда он берет одну монету из 64-го столбика (а из других – ничего). У второго игрока имеется ответный выигрышный ход. Пусть он этим ходом берет $k_i$ монет из $i$-го столбика для всех $i = 61, 62..., 70$ (некоторые $k_i$ могут быть равны 0). В результате после этого из всех столбиков, кроме 64-го, окажутся изъяты $k_i$ монет, а из 64-го – $(k_{64} + 1)$ монет. Далее любые ходы начинающего второй игрок парирует своими ходами, пока не заберет последнюю монету. Но ведь начинающий игрок может первым ходом взять из всех столбиков, кроме 64-го, те же $k_i$ монет, а из 64-го – $(k_{64} + 1)$ монет! В результате получится та же ситуация, но очередь хода за вторым игроком, и парировать его ходы будет уже первый, пока не победит. Таким образом, предположение о том, что победу может обеспечить себе второй игрок, было неверным, и побеждает начинающий. Правда, мы не можем указать его конкретную стратегию, но в условии об этом не спрашивалось.

Для полноты доказательства надо убедиться, что такой ход начинающего допустим правилами игры. Для всех столбиков, кроме 64-го, изъятое число монет вполне допустимо. А из 64-го? Когда начинающий взял из 64-го столбика одну монету, там осталось 63 монеты. Тогда второй игрок мог взять из этого столбика не более $7 < \sqrt{63}$ монет. Поэтому $k_{64} + 1 \le 8$, и первый игрок первым ходом действительно мог взять из 64-го столбика $k_{64} + 1$ монет.

## *Заключительный этап конкурса «Математика 6–8»*

**1.** См. рис.2.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × |
| 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × |
| × | 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 |
| × | 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 |
| 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × |
| 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × |
| × | 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 |
| × | 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 |
| 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × |
| 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × | 0 | × |

*Рис. 2*

**2.** Если число минусов четно, то выражение можно привести к виду $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. А если нечетно, то к виду $1 + 2 - 3 + 4 - 5 - 6 = -7$.

**3.** Рассмотрите вершины квадрата и вершины равносторонних треугольников, построенных во внешнюю сторону (рис.3). Можно строить треугольники и во внутреннюю сторону (рис.4); но нетрудно сообразить, что это – всего лишь иной способ описания той же самой конфигурации точек.

**4.** Центр искомой окружности

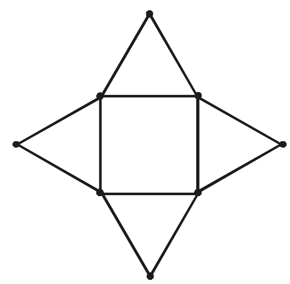

*Рис. 3*

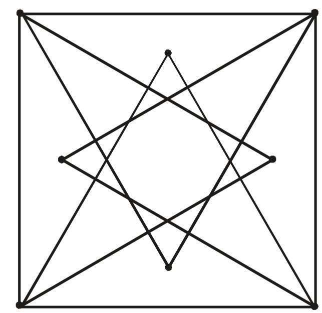

*Рис. 4*

– та самая точка, о которой сказано в первом предложении условия задачи.

**5.** Треугольники $A_2B_1C_2$, $C_2A_1B_2$ и $B_2C_1A_2$ (рис.5) обладают следующими свойствами: $C_2B_1 = C_2A_1$, $B_2A_1 = B_2C_1$, $A_2C_1 = A_2B_1$ и $\angle A_2B_1C_2 + \angle C_2A_1B_2 + \angle B_2C_1A_2 = 360°$. (Последнее равенство легко получить при помощи теоремы о вписанном угле. Можно рассуждать и иначе: проведя отрезки $IA_1$, $IB_1$, $IC_1$ и воспользовавшись равнобедренностью треугольников $B_1IC_2$, $C_2IA_1, \ldots, A_2IB_1$, получить равенство сумм углов

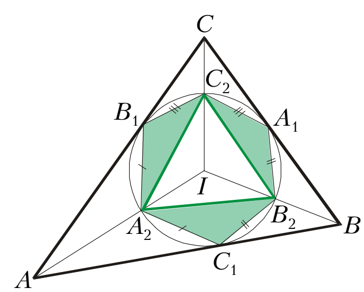


*Рис. 5*

$$\angle A_2B_1C_2 + \angle C_2A_1B_2 + \angle B_2C_1A_2 = \angle B_1C_2A_1 + \angle A_1B_2C_1 + \angle C_1A_2B_1,$$

откуда, воспользовавшись знанием суммы углов шестиугольника, получаем нужное равенство.) Следовательно, из треугольников $A_2B_1C_2$, $C_2A_1B_2$ и $B_2C_1A_2$ можно сложить треугольник. По трем сторонам он равен треугольнику $A_2B_2C_2$.

**6.** Разобьем прямоугольник средними линиями на 4 равных прямоугольника. Не ограничивая общности, можно считать, что выбранная точка лежит в левой нижней части (рис.6). Очевидно, $MB = KL < LM + MK \le CM + MA$ и $MB \ge MA$, $MB \ge MC$.

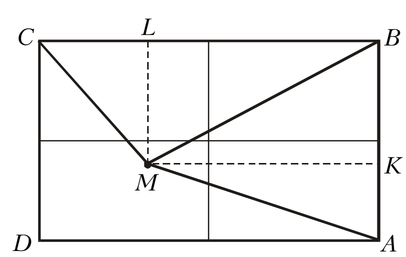


*Рис. 6*

**7.** Сначала разрежем по сплошной красной