«Квант» для младших школьников

Задачи

(см. «Квант» №2)

1. Да. Если бы некоторые две гирьки весили вместе не меньше, чем некоторые три другие, можно было бы выбрать из остальных пяти гирек две, первая из которых весит не меньше, чем вторая. Добавив первую к двум гирькам, а вторую – к трем, получим три гирьки, перевешивающие четыре другие гирьки, что противоречит условию.

2. В начале есть по крайней мере 10 джентльменов в шляпах, следовательно, всего шляп не меньше 10. В конце есть по крайней мере 10 джентльменов без шляп, следовательно, шляп не больше 10. Поэтому шляп ровно 10. Значит, и количество джентльменов в шляпах в любой момент (в частности, вначале) равно 10.

3. Дракон. Если все драконы погибли, то кто-то из рыцарей убил нечетное число драконов и не мог пасть жертвой принцессы.

4. Пусть в каждом из кошельков лежит x копеек, а всего имеется y кошельков. Тогда общая сумма денег составляет xy копеек.

После того как в каждый кошелек добавили по копейке, а количество кошельков уменьшили на 1%, общая сумма денег составила, очевидно, $(x+1)\cdot 0{,}99y$. Так как сумма денег при этом уменьшилась, то $(x+1)\cdot 0{,}99y < xy$, откуда $(x+1)\cdot 0{,}99 < x$ и $x > 99$.

После того как из каждого кошелька изъяли по копейке, а количество кошельков при этом увеличили на 1%, общая сумма денег составила $(x-1)\cdot 1{,}01y$. Так как сумма денег при этом уменьшилась, то $(x-1)\cdot 1{,}01y < xy$, откуда $(x-1)\cdot 1{,}01 < x$ и $x < 101$.

Итак, получается $99 < x < 101$. Учитывая, что x – количество копеек (т.е. заведомо целое число), получаем единственную возможность: $x = 100$, т.е. в каждом кошельке было по 100 копеек (или, если угодно, по рублю).

Понятно, что если, не меняя количества кошельков, в каждый из них добавить еще по рублю, то в каждом кошельке станет вдвое больше денег. Поэтому и общая сумма денег возрастет в 2 раза.

5. Достроим чертеж до прямоугольника $HEFG$ и введем обозначения, показанные на рисунке 1.

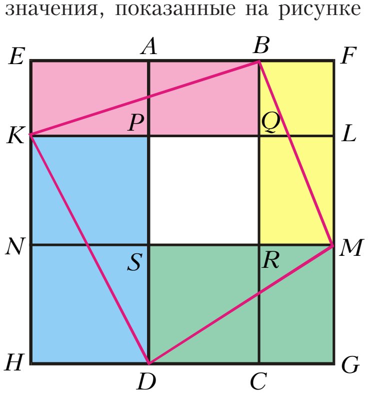

Рис. 1

Поскольку площадь $\triangle KQB$ равна половине площади прямоугольника $KEBQ$, площадь $\triangle BRM$ равна половине площади прямоугольника $BRMF$, площадь $\triangle MSD$ равна половине площади прямоугольника $MSDG$, площадь $\triangle DPK$ равна половине площади прямоугольника $DPKH$, то площадь четырехугольника $KBMD$ равна полусумме площадей четырехугольников $HEFG$ и $PQRS$.

Аналогичными рассуждениями убеждаемся, что площадь четырехугольника $ALCN$ также равна полусумме площадей четырехугольников $HEFG$ и $PQRS$.

Следовательно, площади четырехугольников $ALCN$ и $KBMD$ равны.

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №6 за 2002 г.)

11. Покажем, что Пятнице не удастся придумать для пометки дуриана такую последовательность из палочек и кружочков, чтобы по его записи Робинзон всегда мог однозначно установить, сколько каких плодов было запасено.

Действительно, если эта пометка представляет собой n палочек, то запись, состоящая из n палочек, расшифровывается двумя разными способами: 1 дуриан или n бананов.

Если эта пометка представляет собой n кружочков, то запись, состоящая из $2n$ кружочков, расшифровывается двумя способами: 2 дуриана или n ананасов.

Пусть пометка для дуриана содержит и палочки, и кружочки. Предположим сначала, что она начинается с палочек, т.е. имеет вид

$$d = 11\ldots100\ldots011\ldots100\ldots01\ldots$$

В этой пометке каждому промежутку из кружочков обязательно предшествует промежуток из палочек. Рассмотрим произвольный промежуток из кружочков, к которому присоединим одну палочку спереди из предшествующего промежутка, т.е. набор вида 100…0. Если кружочков в нем $2n$, то его можно расшифровать как 1 банан и n ананасов. Если число кружочков $2n-1$, то его можно расшифровать как 1 кокос и $n-1$ ананасов. Эту процедуру можно проделать с каждым набором такого вида. Оставшиеся палочки будем считать отметками для бананов. Таким образом, запись d можно расшифровать двумя способами: 1 дуриан или соответствующее количество бананов, кокосов и ананасов, полученное из указанной выше процедуры.

Предположим теперь, что пометка для дуриана начинается кружочками, т.е. имеет вид

$$d = 00\ldots011\ldots100\ldots011\ldots$$

Для каждого промежутка из кружочков, которому предшествует промежуток из палочек, применим процедуру расшифровки, описанную выше. Рассмотрим начальный промежуток. Если он состоит из $2n$ кружочков, то его можно трактовать как n ананасов, и запись d вновь расшифровывается двумя способами. Если он состоит из $2n-1$ кружочков, то, приписав к нему спереди палочку, получаем расшифровку: 1 кокос и $n-1$ ананасов. Следовательно, запись $1d$ расшифровывается двумя способами: 1 банан и 1 дуриан или соответствующее число бананов, кокосов и ананасов, полученное с помощью описанной выше процедуры.

12. Заметим что различные числа $\overline{abc}$ и $\overline{a_1b_1c_1}$ порождают различные числа $\overline{abc}+\overline{ab}+a = 111a+11b+c$ и $\overline{a_1b_1c_1}+\overline{a_1b_1}+a_1 = 111a_1+11b_1+c_1$. Это позволяет переформулировать задачу так: сколько существует трехзначных чисел $\overline{abc}$, для которых $\overline{abc}+\overline{ab}+a \le 999$? Всего трехзначных чисел имеется 900 штук, а неравенству $\overline{abc}+\overline{ab}+a > 999$ удовлетворяют лишь те из них, которые начинаются с цифры 9, кроме числа 900. Отсюда получаем ответ: $900 - 99 = 801$.

13. Допустим, что произведение площадей треугольников ABD и BCD равно произведению площадей треугольников ABC и ACD. Пусть O – точка пересечения диагоналей BD и AC. Обозначим $S_1 = S_{\triangle ABO}$, $S_2 = S_{\triangle BOC}$, $S_3 = S_{\triangle COD}$, $S_4 = S_{\triangle AOD}$. Тогда $S_{\triangle ABC} = S_1 + S_2$, $S_{\triangle CDA} = S_3 + S_4$, $S_{\triangle BCD} = S_2 + S_3$, $S_{\triangle DAC} = S_4 + S_1$.

Поэтому

$$(S_1+S_2)(S_3+S_4) = (S_2+S_3)(S_4+S_1),$$

или

$$S_1S_4 + S_2S_3 = S_2S_1 + S_3S_4,$$