(Начало см. на с. 31)

при которых весы могут оставаться в покое ($s'' = 0$):

$$s_{\pm} = \frac{G \mp F_{\text{тр}}}{k} = s_{\text{ист}} \mp \frac{F_{\text{тр}}}{k} .$$

Значит, вокруг «истинного» показания весов существует полоса застоя шириной $\Delta s = 2F_{\text{тр}}/k$ (она заштрихована на рисунке 1,*в*), попав в которую с нулевой скоростью (т.е. с нулевой кинетической энергией), весы остаются в покое.

Ясно, что Продавцу наиболее выгодно снять груз в точке *C*, в которой весы показывают максимальный вес. Поэтому рассмотрим движение весов с самого начала. Пусть аккуратный Продавец кладет товар на чашку весов с нулевой начальной скоростью и отпускает его. Значит, в начальный момент времени $t = 0$ отклонение весов и скорость этого отклонения равны нулю:

$$s_0 = 0 , \quad s_0' = 0 .$$

Чашка весов с товаром начнет двигаться вниз ($s_0' > 0$, согласно нашему выбору оси координат), в уравнении (2) перед силой трения нужно взять знак «минус» (сила трения тормозит движение), так что решение уравнения (2) примет вид

$$s(t) = \frac{G - F_{\text{тр}}}{k}(1 - \cos\omega t) . \qquad (5)$$

Но ведь это уравнение гармонических колебаний! А как же трение? Дело в том, что выражение (5) верно только до точки *C*, после прохождения которой изменяется знак скорости ($s' < 0$) и, следовательно, знак перед силой трения. Значит, «гармонические колебания» сначала будут происходить вокруг уровня $s = s_+$, а затем вокруг $s = s_-$ и т.д. Понятно, что наибольшее отклонение будет достигнуто при $\cos\omega t_C = -1$, т.е. в момент времени $t_C = \pi/\omega$, и это отклонение (наиболее выгодное для Продавца) будет равно

$$s_{\max} = 2\frac{G - F_{\text{тр}}}{k} . \qquad (6)$$

И это еще не все. Ведь можно *уронить* товар с высоты *h* (над чашкой весов, находящейся в положении равновесия; см. рис.1,*б*). Тогда, считая удар товара о чашку абсолютно неупругим, из закона сохранения импульса получим начальное значение скорости чашки с товаром:

$$(m + M)s_0' = M\sqrt{2gh} , \quad s_0' = \frac{\sqrt{2gh}}{1 + m/M} . \qquad (7)$$

Можно решить уравнение (2) с этими новыми начальными условиями (см. Приложение для желающих). Но для определения наибольшего отклонения $s_{\max}$ достаточно энергетических соображений. Ведь начальная кинетическая энергия чашки и товара $(m + M)s_0'^2/2$ идет прежде всего на сжатие пружины: потенциальная энергия пружины равна $ks_{\max}^2/2$ и на преодоление силы трения: ее работа равна $-F_{\text{тр}}s_{\max}$; кроме того, поле тяготения Земли совершает работу, равную $Gs_{\max}$. В результате получим уравнение

$$\frac{ks_{\max}^2}{2} = (G - F_{\text{тр}})s_{\max} + \frac{Gh}{1 + m/M} .$$

Последнее слагаемое справа – начальная кинетическая энергия чашки с грузом. Заметим, что она меньше начальной потенциальной энергии *Gh* груза над чашкой, поскольку часть этой энергии перешла в тепло при неупругом ударе. (А о том, почему сюда не вошла сила *mg*, мы уже говорили.) Решение этого квадратного уравнения тривиально:

$$s_{\max} = \frac{G - F_{\text{тр}}}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2Ghk}{(G - F_{\text{тр}})^2(1 + m/M)}}\right)$$

(при $h = 0$ оно совпадает с выражением (6)).

Как же узнать истинный вес товара *G* (или его массу $M \equiv G/g$)? Ведь в последнем уравнении помимо *G* еще много неизвестных: масса чашки *m*, жесткость пружины *k*, сила трения $F_{\text{тр}}$ – четыре неизвестных! А что известно? Прежде всего, $s_{\max}$ (или ложный вес $G_{\max} = ks_{\max}$ – именно за него вас просят заплатить в кассу). Далее, вы можете непосредственно оценить высоту *h*, с которой роняется товар, и кроме того – засечь по секундной стрелке ваших часов момент

$$t_C = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{m + M}{k}} .$$

Это уже кое-что, но этого недостаточно для определения перечисленных выше четырех неизвестных. Что же делать? Конечно, можно принести собственную выверенную гирю (известной массы) и самому поэкспериментировать с весами (ставя или роняя ее на чашку) – но это может задеть честь легко ранимого Продавца. Можно попросить его уронить тот же товар с высоты $h_1 > h$, $h_2 > h_1$,.. – сколько нужно раз (подумайте сами, сколько именно раз), чтобы получить нужное число максимальных показаний весов и, следовательно, нужное число уравнений, а затем найти все неизвестные и среди них истинный вес *G*. Только, проведя вычисления, не забудьте взять сдачу!

Приложение для желающих

Приведем решение уравнения (2) для ненулевой начальной скорости движения чашки с товаром s_0' (см выражение (7)):

$$s(t) = A(1 - \cos\omega t) + B\sin\omega t ,$$

где

$$A = \frac{G \mp F_{\text{тр}}}{k} , \quad B = \frac{s_0'}{\omega} .$$

Это решение легко запрограммировать на компьютере, только надо не забывать переключать знак перед $F_{\text{тр}}$ в выражении для *A* каждый раз, когда достигается нулевое значение скорости (т.е. когда касательная к кривой $s(t)$ становится горизонтальной). Например, первый раз это случится в момент времени, определяемый условием

$$\omega t = \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2Ghk/(1 + m/M)}}{G - F_{\text{тр}}}\right) .$$

Вычисления следует продолжать до тех пор, пока система не окажется впервые с нулевой скоростью в полосе застоя.

Полезно также уговорить компьютер нарисовать картины для различных значений параметров задачи (*k*, $G \equiv Mg$, *h*, m/M).

Желаем успехов!