монеты. Здесь получаем: $4 \to 3,1 \to 2,2$, т.е. еще один ответ: $K = 2$, $M = 2$.

$K = 3$. Тогда $KM = 6$, и первоначально в кошельке 6 монет. Здесь получаем: $6 \to 5,1 \to 4,2 \to 3,2,1 \to \to 3,2,1 \to$ и т.д. Явное зацикливание, причем состояния, удовлетворяющего условию, так и не появилось. Значит, здесь ответа нет.

Так или иначе, но получены четыре пары значений (K, M), удовлетворяющих условию. Докажем, что других значений нет. Для этого предположим противное – что такие пары есть для какого-то $M > 2$, и покажем, что это ведет к противоречию. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть после какого-то хода расположение монет в кошельках оказалось следующим (здесь n – некоторое натуральное число):*

- *в $(K - n)$ кошельках по $(M + n)$ монет в каждом;*
- *в $(M - K + 1)$ кошельках по n монет в каждом;*
- *имеется еще $(n - 1)$ пар непустых кошельков, причем в двух из них по 1 монете, в двух других – по 2 монеты, ... , в двух последних – по $(n - 1)$ монет. (Нетрудно проверить, что всего в кошельках при этом лежит как раз KM монет.)*

Утверждается, что тогда перед последним ходом в кошельках было такое же расположение монет, но при n, увеличенном на 1, т.е.

- *в $(K - n - 1)$ кошельках по $(M + n + 1)$ монет в каждом;*
- *в $(M - K + 1)$ кошельках по $(n + 1)$ монет в каждом;*
- *имеется еще n пар непустых кошельков, причем в двух из них по 1 монете, в двух других – по 2 монеты, ... , в двух последних – по n монет.*

Если утверждение леммы верно, то тогда можно однозначно определить расположение монет перед предыдущим ходом, перед «предпредыдущим» ходом и так далее.

Докажем лемму. Определим общее количество кошельков для первоначально указанного расположения монет:

$$(K - n) + (M - K + 1) + 2(n - 1) = M + n - 1.$$

Из них один кошелек новый, а остальные $(M + n - 2)$ кошельков – старые. Может ли какой-нибудь кошелек с n монетами быть новым? Если да, то согласно Ф1 должно выполняться неравенство $n \geq M + n - 2$, откуда $M \leq 2$. Но такие значения M были рассмотрены отдельно ранее, а сейчас мы имеем дело с бóльшими M. По аналогичным причинам не может быть новым никакой кошелек, в котором меньше n монет (тогда значения M получаются еще меньше). Поэтому никуда не денешься – новым может быть только кошелек с $(M + n)$ монетами. А это позволяет нам однозначно восстановить расположение монет перед предыдущим ходом. Все остальные кошельки – старые, и перед ходом в каждом из них было на 1 монету больше. Но старых кошельков, как мы знаем, всего $(M + n - 2)$, поэтому, чтобы в новом кошельке было после хода ровно $(M + n)$ монет, необходимо наличие еще двух опустевших кошельков (в которых перед ходом было по одной монете). Получаем как раз такую ситуацию, как описано в лемме. Все!

Обратим внимание на такое следствие из леммы: перед ходом должно быть на 1 кошелек больше, чем после хода, а перед предыдущим – еще на 1 кошелек больше и так далее. Поэтому если в процессе перекладывания монет возникло такое расположение монет в кошельках, как в лемме, то оно никак не могло появиться из *единственного* кошелька с KM монетами – ведь «продвигаясь» от этого расположения назад, мы будем получать все увеличивающееся количество кошельков, которое, очевидно, никак не сможет стать равным 1.

Долго мы возились с этой леммой, и пока вроде не очень ясно, зачем. Но сейчас это выяснится. Пусть после очередного хода в K кошельках оказалось по M монет. Восстановим расположение монет перед последним ходом. Один из кошельков – новый, остальные $(K - 1)$ – старые. В каждом старом кошельке было перед ходом на 1 монету больше, т.е. по $(M + 1)$ монет. Чтобы соблюсти «количественный баланс» числа монет, необходимо добавить еще $(M - K + 1)$ опустевших кошельков. Таким образом, перед последним ходом было:

- в $(K - 1)$ кошельках по $(M + 1)$ монет в каждом;
- в $(M - K + 1)$ кошельках по 1 монете в каждом.

А это как раз расположение монет, указанное в лемме для случая $n = 1$. Значит, в соответствии с леммой, перед каждым предыдущим ходом непустых кошельков было на 1 больше, и, продвигаясь назад, мы никак не придем к единственному исходному кошельку. Противоречие.

Итак, задача решена. Имеется всего 4 пары значений (K, M), удовлетворяющих условию: (1, 1), (2, 1), (1, 2) и (2, 2).

И.Акулич

M1844. *Пятиугольник $ABCDE$, периметр которого равен 4, таков, что $AB = DE = 1$, а также $\angle BAE = = \angle DEA = \angle BCD = 90°$ (рис.1). Докажите, что биссектриса CF угла C делит пятиугольник на четырехугольники, у которых равны периметры и равны площади.*

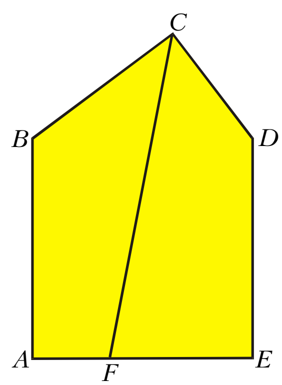

Рис. 1

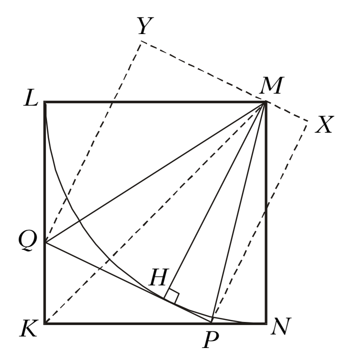

Рис. 2

Возьмем квадрат $KLMN$ со стороной 1 и проведем в нем дугу окружности $\overset{\frown}{LN}$ с центром в точке M (рис.2). Отрежем от квадрата треугольник PKQ, подобный треугольнику BCD, так, чтобы его гипотенуза PQ касалась дуги LN, скажем, в точке H. Тогда ясно, что $HP = PN$ и $HQ = QL$, т.е. периметр ΔPKQ равен 2 и треугольник PKQ равен треугольнику BCD.

Отразим точку H центрально-симметрично относительно середины отрезка PM; получим точку X. При этом образовался прямоугольник $XPHM$ со стороной $XP = 1$. Отразим симметрично точку H относительно