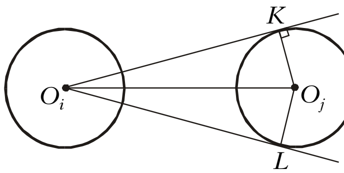

Рис. 2

6 (О.Гольберг). Заметим, что окружности не пересекаются и (поскольку $\sin x < x$ при $x > 0$) $\frac{1}{O_iO_j}$ меньше радианной меры угла KO_iO_j (рис.2), где O_iK и O_iL – касательные к окружности Γ_j.

Будем обозначать через V_{ij} угол KO_iL, через W_{ij} – объединение V_{ij} с вертикальным ему углом, через $\Phi\left(V_{ij}\right)$ – радианную меру угла V_{ij}, $\Phi\left(W_{ij}\right) = 2\Phi\left(V_{ij}\right)$. Тогда $\frac{1}{O_iO_j} < \frac{1}{O_iO_j} < \frac{1}{2}\Phi\left(V_{ij}\right) = \frac{1}{4}\Phi\left(W_{ij}\right)$.

Рассмотрим выпуклую оболочку центров данных окружностей. При этом три центра не могут лежать на одной прямой, так как в противном случае проходящая через них прямая пересекает три окружности. Следовательно, в выпуклой оболочке k вершин, где $k \ge 3$. Обозначим через $P_1, P_2, \ldots, P_k$ вершины выпуклой оболочки по порядку, например, по часовой стрелке, $Q_{k+1}, \ldots, Q_n$ – вершины, не вошедшие в выпуклую оболочку. Пусть $R = \{1, \ldots, k\}$, $S = \{k+1, \ldots, n\}$.

Предположим, что S не пусто, т.е. $k < n$. Выберем произвольно $l \in S$. Углы W_{lj}, $j \ne l$, пересекаются только в вершине Q_l, так как в противном случае прямая, проходящая через Q_l и общую точку этих углов, пересекает три окружности. Поэтому

$$\sum_{j\ne l}\Phi\left(W_{lj}\right) < 2\pi \Rightarrow \sum_{j\ne l}\frac{1}{O_lO_j} < \frac{1}{4}\sum_{j\ne l}\Phi\left(W_{lj}\right) < \frac{\pi}{2}.$$

Сложив эти неравенства по всем $l \in S$, получим

$$2\sum_{i\ne j;\ i,j\in S}\frac{1}{O_iO_j} + \sum_{i\in S,\ j\in R}\frac{1}{O_iP_j} < (n-k)\frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

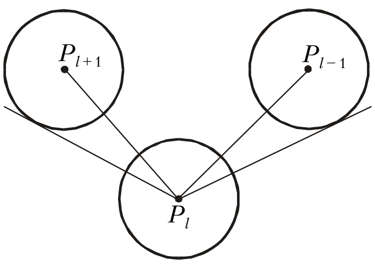

Рис. 3

Выберем теперь произвольно $l \in R$. Рассмотрим углы V_{lj}, $j \ne l$. Они все лежат в угле, образованном касательными из P_l к окружностям с центрами P_{l-1} и P_{l+1} (здесь и далее $P_0 = P_k$, $P_{k+1} = P_1$), лежащими вне выпуклой оболочки (рис.3). Поэтому если обозначить углы $P_{l-1}P_lP_{l+1}$, $l \in R$, через α_l, то

$$\sum_{j\ne l}\Phi\left(V_{lj}\right) \le \alpha_l + \frac{1}{2}\Phi\left(V_{l(l-1)}\right) + \Phi\left(V_{l(l+1)}\right).$$

Отсюда

$$\sum_{j\ne l-1,l,l+1}\Phi\left(V_{lj}\right) + \frac{1}{2}\Phi\left(V_{l(l-1)}\right) + \Phi\left(V_{l(l+1)}\right) \le \alpha_l.$$

Сложив эти неравенства по всем $l \in R$ и воспользовавшись равенством

$$\sum_{l=1}^{k}\alpha_l = \pi(k-2),$$

получаем

$$\sum_{l\in R}\Phi\left(V_{l(l+1)}\right) + 2\sum_{m\ne l\pm1;\ m,l\in R}\Phi\left(V_{lm}\right) + \sum_{l\in R,\ t\in S}\Phi\left(V_{lt}\right) \le \pi(k-2).$$

Но $\frac{2}{O_iO_j} < \Phi\left(V_{ij}\right)$, значит,

$$\sum_{l\in R}\frac{1}{P_lP_{l+1}} + 2\sum_{m\ne l\pm1;\ m,l\in R}\frac{1}{P_lP_m} + \sum_{l\in R,\ t\in S}\frac{1}{P_lQ_t} < \frac{\pi(k-2)}{2}. \qquad (2)$$

Оценим первую из сумм. Проведем общие внутренние каса-

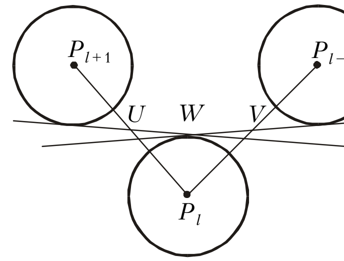

Рис. 4

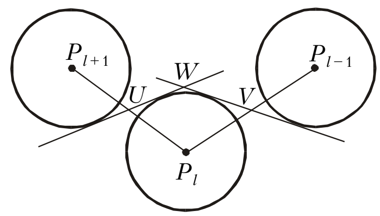

Рис. 5

тельные к окружностям с центрами P_{l-1}, P_l, P_{l+1}, как показано на рисунке 4. Пусть они пересекаются в точке W и пересекают отрезки P_lP_{l-1} и P_lP_{l+1} в точках V и U соответственно. Тогда $\angle UWV < \pi$, так как если $\angle UWV \ge \pi$, то найдется прямая, пересекающая все три окружности с центрами P_{l-1}, P_l и P_{l+1} (рис.5). Итак, получаем, что

$$\angle WVP_l + \angle P_lUW + \alpha_l < \pi,$$

т.е.

$$\angle WVP_l + \angle WUP_l < \pi - \alpha_l.$$

Из равенства радиусов окружностей следует, что V – середина отрезка P_lP_{l-1}, поэтому

$$\sin\angle WVP_l = \frac{2}{P_lP_{l-1}} \Rightarrow \frac{1}{P_lP_{l-1}} = \frac{\sin\angle WVP_l}{2} < \frac{\angle WVP_l}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P_lP_{l-1}} + \frac{1}{P_lP_{l+1}} \le \frac{\angle WVP_l}{2} + \frac{\angle WUP_l}{2} < \frac{\pi-\alpha_l}{2}.$$

Сложив эти неравенства по всем $l \in R$, получаем

$$2\sum_{l\in R}\frac{1}{P_lP_{l-1}} < \sum_{l\in R}\frac{\pi-\alpha_l}{2} = \pi, \text{ так как } \sum_{l=1}^{k}\alpha_l = (k-2)\pi.$$

Итак,

$$\sum_{l\in R}\frac{1}{P_lP_{l-1}} \le \frac{\pi}{2}. \qquad (3)$$

Сложив неравенства (1), (2) и (3), получаем

$$2\sum_{i\ne j;\ i,j\in S}\frac{1}{Q_iQ_j} + 2\sum_{i\in S,\ j\in R}\frac{1}{Q_iP_j} + 2\sum_{j\ne i\pm1;\ i,j\in R}\frac{1}{P_iP_j} + 2\sum_{i\in R}\frac{1}{P_iP_{i-1}} \le$$

$$\le \frac{\pi}{2} + \frac{\pi(k-2)}{2} + \frac{\pi(n-k)}{2} = \frac{\pi}{2}(n-1).$$

Но сумма в левой части есть $2\sum_{i\ne j}\frac{1}{O_iO_j}$, поэтому $\sum_{i\ne j}\frac{1}{O_iO_j} \le \frac{\pi}{4}(n-1)$, что и требовалось доказать.

Публикацию подготовили
Н.Агаханов, Д.Терёшин