

# Материалы вступительных экзаменов 2002 года

Институт естественных наук и экологии при «Курчатовском институте»

## МАТЕМАТИКА

Вариант письменного экзамена

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} -\cos(x+y) + 5\cos(x-y) = 4, \\ 3\cos x \sin y - 2\sin x \cos y = 1 \end{cases}$$

на интервале  $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ ,  $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ .

2. Найдите все значения параметра  $p$ , при котором система неравенств

$$\begin{cases} (p+2)x + 4y \geq 4p + 3, \\ 2x + (6p+1)y \leq 2 - 6p, \\ px + 10y \leq 4(p-1) \end{cases}$$

имеет единственное решение.

3. При каком значении  $x_0$  площадь криволинейной фигуры, ограниченной графиком функции  $y = x^4 + 8x^2$ , касательной к нему, проведенной в точке графика с абсциссой  $x_0$ , и прямой  $x = x_0 - 2$ , наименьшая? Какова эта наименьшая площадь?

4. В треугольник  $ABC$  помещены три равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Все три окружности имеют одну общую точку. Найдите радиус этих окружностей, если радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника  $ABC$  равны  $r$  и  $R$ .

5. Два конуса имеют общее основание и расположены по разные от него стороны. Радиус основания  $r$ , высота одного конуса  $h$ , другого  $H$  ( $h \leq H$ ). Найдите наибольшее расстояние между двумя прямыми, содержащими образующие этих конусов.

6. Вычислите сумму

$$nx + (n-1)x^2 + (n-2)x^3 + \dots + 2x^{n-1} + x^n.$$

## ФИЗИКА

Вариант письменного экзамена

1. На горизонтальной поверхности стола стоит тонкий обруч массой  $M$  и радиусом  $R$  (рис.1). В противоположных точках его вертикального диаметра закреплены два точечных груза с массами  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_2 > m_1$ ). Найдите период  $T$  малых колебаний обруча, считая, что проскальзывание в точке касания обруча и стола отсутствует. Указание:  $\sin \varphi \approx \varphi$  и  $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$  при малых значениях  $\varphi$ .

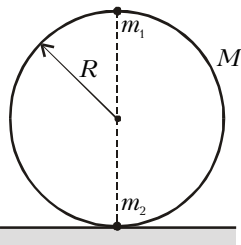


Рис. 1

2. На горизонтальной поверхности стоит цилиндрический сосуд с гладкими стенками, перекрытый невесомым поршнем (рис.2). К поршню и дну сосуда прикреплена невесомая упругая пружина. Верхняя часть сосуда сообщается с вакуумом. Под

поршнем находится один моль идеального газа. Газ нагрели так, что его температура увеличилась на конечную величину  $\Delta T$ . 1) Найдите теплоемкость газа  $C$  и работу  $A$ , совершенную газом в процессе нагревания. 2) Найдите изменение объема газа  $\Delta V$ , если известны его начальный объем  $V_1$  и начальная температура  $T_1$ . Длиной недеформированной пружины пренебречь.

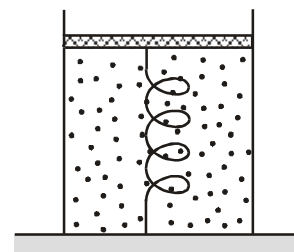


Рис. 2

3. Найдите количество теплоты, которое выделится в цепи после замыкания ключа  $K$  (рис.3). Потерями энергии на излучение пренебречь.

4. В одной плоскости расположены длинный тонкий прямой провод, по которому течет постоянный ток  $I$ , и квадратная рамка со стороной  $a$ , сделанная из проводника общим сопротивлением  $R$ . Расстояние между проводом и ближайшей стороной рамки, параллельной проводу, равно  $b$ . На какое расстояние  $\Delta l$  сместится рамка после того, как ей мгновенно сообщат небольшой импульс  $\Delta p$ , перпендикулярный проводу? Считать, что  $\Delta l \ll b$ .

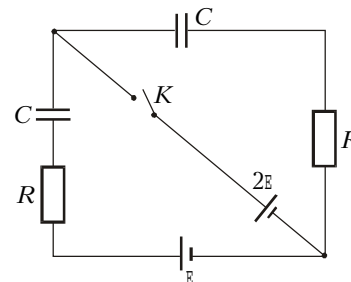


Рис. 3

5. Тонкий стержень перпендикулярен главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием  $F$ . Расстояние от стержня до линзы  $d$  больше  $F$ . Между линзой и стержнем перпендикулярно главной оптической оси ставят плоскопараллельную пластинку, изготовленную из стекла с показателем преломления  $n$ . 1) При каких значениях толщины пластинки  $l$  линза будет давать действительное изображение стержня? 2) Найдите коэффициент поперечного увеличения линзы  $\Gamma$ . Считать, что поперечные размеры пластинки велики по сравнению с диаметром линзы.

Публикацию подготовил С.Фомичев

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ

## МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Какое из двух чисел больше:

$$-\frac{\log_{1/13}(17424)}{\log_{13}(121)} - 1 \text{ или } \operatorname{ctg}\left(\frac{75\pi}{23}\right)?$$