Числа Фибоначчи

В 1202 году Леонардо Фибоначчи (Леонардо Пизанский) в «Книге об абаке» рассмотрел последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... , каждый следующий член которой равен сумме двух предыдущих. Формулами это можно записать так: $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$, $\varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + \varphi_n$. Пользуясь ими, можно посчитать сколь угодно много первых членов последовательности:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
φ_n	1	1	2	3	5	8	13	21
n	9	10	11	12	13	14	15	16
φ_n	34	55	89	144	233	377	610	987

Последовательность Фибоначчи возникает во многих задачах и обладает интересными свойствами. Например, рассмотрим выражения

$$1,\ 1+\frac{1}{1}=\frac{2}{1},\ 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}=\frac{3}{2},$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}=\frac{5}{3},$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}=\frac{8}{5},$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}=\frac{13}{8}\ldots$$

Возникают дроби вида φ_{n+1}/φ_n. Да оно и не удивительно:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}}=1+\frac{1}{13/8}=$$

$$=1+\frac{8}{13}=\frac{13+8}{13}=\frac{21}{13}.$$

В общем виде это можно записать так:

$$1+\frac{1}{\varphi_{n+1}/\varphi_n}=1+\frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}}=$$

$$=\frac{\varphi_{n+1}+\varphi_n}{\varphi_{n+1}}=\frac{\varphi_{n+2}}{\varphi_{n+1}}.$$

Следующий пример. Давайте выясним: сколькими способами можно разрезать полоску размером $2 \times n$ на доминошки (т.е. прямоугольники размером 1×2)? При маленьких n можно все нарисовать: обозначив искомое число способов через $f(n)$, видим из рисунков 1–4, что

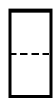

Рис. 1

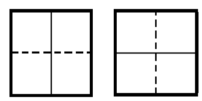

Рис. 2

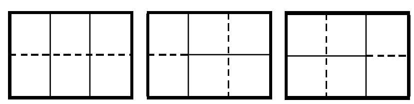

Рис. 3

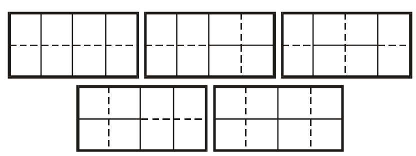

Рис. 4

$f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$, $f(4)=5$. Как найти следующее значение, т.е. $f(5)$? Да очень просто: левая верхняя клетка покрыта либо вертикально (рис.5), либо горизонтально

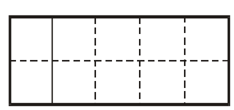

Рис. 5

(рис.6) расположенной доминошкой. Значит, $f(5)$ вариантов

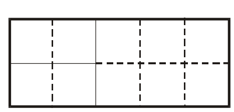

Рис. 6

распадаются на $f(4)$ вариантов рисунка 5 и $f(3)$ вариантов рисунка 6, т.е.

$$f(5)=f(4)+f(3)=5+3=8.$$

Вообще, при любом $n>1$ верна рекуррентная формула

$$f(n+1)=f(n)+f(n-1).$$

Поскольку $f(1)=\varphi_2$ и $f(2)=\varphi_3$, имеем

$$f(n)=\varphi_{n+1}.$$

Теперь выясним: сколько существует n-значных чисел, составленных из цифр 2 и 5, в которых никакие две двойки не стоят рядом? Обозначим искомое количество способов через $g(n)$. Очевидно, $g(1)=2$ и $g(2)=3$ (годятся числа 25, 52 и 55). Легко выписать и трехзначные числа: 252, 255, 525, 552 и 555. Значит, $g(3)=5$. Впрочем, это значение находить даже и не обязательно. Важнее то, что любое интересующее нас $(n+1)$-значное число начинается либо с двойки, либо с пятерки. В первом случае после двойки должна идти пятерка, после которой – любое из $g(n-1)$ чисел, во втором случае никаких ограничений пятерка не создает, так что годится любой из $g(n)$ вариантов.

Мы получили рекуррентную формулу

$$g(n+1)=g(n-1)+g(n),$$

совпадающую с формулой Фибоначчи. Поскольку $g(1)=\varphi_3$, $g(2)=\varphi_4$, имеем

$$g(n)=\varphi_{n+2}.$$

Опять последовательность Фибоначчи!

На рисунке 7 числа Фибоначчи выражают длины сторон спиральной последовательности квадратов на клетчатой бумаге. Из этого рисунка очевидна формула

$$\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2+\ldots+\varphi_n^2=\varphi_n\varphi_{n+1}.$$

Между числами Фибоначчи есть и другие любопытные соот-