О колпаках, хранящихся в темном чулане

А.МАЛЕЕВ

Вы, наверное, не раз уже слышали о принципе Дирихле. В шутливой форме он звучит, например, так: «Если шесть зайцев посадить в пять клеток, то обязательно найдется клетка, в которой будут сидеть не менее двух зайцев». (При этом, естественно, подразумевается, что целостность зайцев не нарушается.) В более общем виде принцип Дирихле можно сформулировать таким образом: «Если $kn+1$ или более зайцев посадить в n клеток, то обязательно найдется клетка, в которой будут сидеть не менее $k+1$ зайцев». Это утверждение доказывается на редкость легко. Допустим, что после рассадки в каждой клетке оказалось не более k зайцев. Тогда в n клетках сидят не более kn зайцев. Но это противоречит условию, что зайцев $kn+1$ или более.

Существует много задач, в основе которых лежит этот принцип, носящий имя знаменитого немецкого математика [1]. Рассмотрим, например, такую.

Задача 1. *В ящике комода хранятся красные, желтые и зеленые носки. Какое наименьшее число носков надо взять наугад из комода, чтобы среди них обязательно оказались четыре носка одного цвета?*

Решение. Поскольку в условии ничего не сказано о том, сколько носков каждого цвета лежит в комоде, то следует предполагать, что возможны любые (в том числе самые худшие) варианты. Поэтому 9 носков нам может не хватить, ибо среди них могут оказаться по три носка каждого цвета. А вот 10 носков заведомо хватит. Действительно, у нас имеются 10 «зайцев» (это взятые из комода носки) и 3 «клетки» (это цвета носков). Поскольку $10=3\times3+1$, то по принципу Дирихле обязательно найдется «клетка», в которой будут сидеть не менее 4 «зайцев», т.е. обязательно найдутся 4 носка одного цвета.

Теперь немного усложним ситуацию.

Задача 2. *Три поросенка, Ниф-Ниф, Нуф-Нуф и Наф-Наф, хранят в жестяной коробке красные, желтые и зеленые леденцы. Какое наименьшее число леденцов надо взять наугад из коробки, чтобы каждому поросенку обязательно достались пять леденцов одного цвета?*

Решение. Покажем, что это наименьшее число — 23. Сначала заметим, что $13=4\times3+1$. Следовательно, в силу принципа Дирихле среди любых 13 или более леденцов (леденцы — это «зайцы») всегда найдутся 5 леденцов одного цвета (цвета — это «клетки»). Поэтому из 23 леденцов можно выбрать 5 леденцов одного цвета. Отдадим из Ниф-Нифу. Среди оставшихся 18 леденцов вновь найдутся 5 леденцов одного цвета. Отдадим их Нуф-Нуфу. И, наконец, из последних 13 леденцов опять можно выбрать 5 леденцов одного цвета, которые отдадим Наф-Нафу. Остается показать, что 22 леденцов может не хватить. Для этого предположим, что среди наугад выбранных 22 леденцов оказалось 14 красных, 4 желтых и 4 зеленых. Ясно, что в этом случае только два поросенка могут получить по 5 леденцов одного цвета.

По сути те же идеи применим теперь к решению задачи, опубликованной в пятом номере журнала «Квант» за 2002 год в Конкурсе имени А.П.Савина «Математика 6–8». Здесь мы рассмотрим более общую формулировку, чем была приведена в журнале.

Задача 3. *В темном чулане N гномов хранят вперемешку колпаки разных цветов, причем колпаков каждого цвета поровну. Проснувшись как-то утром, первый гном попросил m_1 колпаков одного цвета. Белоснежка сходила в чулан и отсчитала в темноте наугад столько колпаков, чтобы их наверняка хватило выполнить его просьбу. Но тут проснулись остальные гномы, и второй гном попросил m_2 колпаков одного цвета, третий попросил m_3 колпаков одного цвета, и так далее, вплоть до последнего гнома, который попросил m_N колпаков одного цвета, причем $m_1 > m_2 \ge m_3 \ge \ldots \ldots \ge m_N$. Чтобы выполнить просьбы всех гномов, Белоснежка вынуждена была еще раз сходить в чулан. Какое наибольшее количество цветов могли иметь колпаки, хранящиеся в чулане?*

Решение. Пусть в чулане хранятся колпаки n разных цветов, причем колпаков каждого цвета поровну и не меньше m_1. Покажем, что если выполнено неравенство

$$n \ge \max_{t=1,2,\ldots,N-1} \frac{m_1+m_2+\ldots+m_t}{m_1-m_{t+1}}, \qquad (1)$$

то Белоснежке не придется второй раз идти в чулан. Действительно, предположим, что она в первый раз наугад отсчитала в чулане s колпаков. Мы, конечно, не знаем это число, но, чтобы наверняка выполнить просьбу первого гнома, оно обязательно должно удовлетворять соотношению

$$s \ge (m_1-1)n+1, \qquad (2)$$

так как по принципу Дирихле из $(m_1-1)n+1$ колпаков всегда можно выбрать m_1 колпаков одного цвета, а вот $(m_1-1)n$ колпаков может не хватить. Далее, предпо-

[1] *Петер Густав Лежён Дирихле (1805–1859) — немецкий математик, широко известный своими трудами по аналитической теории чисел, теории функций и математической физике.*