Упражнение 7. Докажите, что точка G существует, т.е. что упомянутые отрезки пересекаются в одной точке. Докажите также формулы для барицентрических координат точки G.

По формуле (1) находим

$$OG^2 = R^2 - 4rp^2 (R-r)/(r+4R)^2 ,$$

$$IG^2 = r^2 - 3r^2p^2/(r+4R)^2 .$$

Исключая p^2, получаем

$$\frac{OG^2 - R^2}{IG^2 - r^2} = \frac{4}{3}\frac{R+r}{r}, \text{ т.е. } k_1 OG^2 + k_2 IG^2 = C ,$$

где k_1, k_2 и C выражаются через постоянные величины r и R. Таким образом, искомое геометрическое место есть окружность, центр которой лежит на прямой OI (рис.9), так что G движется по окружности.

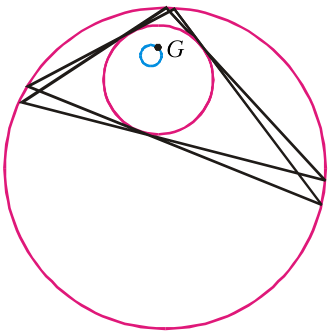

Рис. 9

Точка Нагеля

Точкой Нагеля N называется точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками касания соответствующих вневписанных окружностей (рис.10).

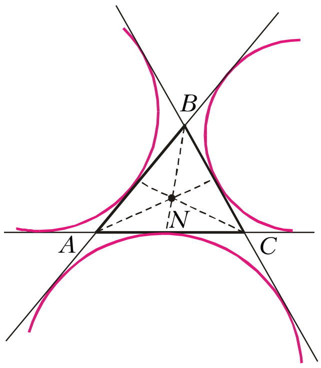

Рис. 10

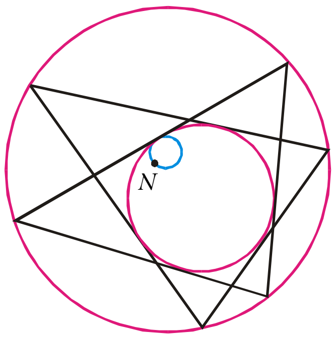

Рис. 11

Упражнение 8. Докажите, что а) точка N существует, т.е. что упомянутые отрезки пересекаются в одной точке; б) барицентрические координаты точки N равны

$$\left(\frac{p-a}{p}; \frac{p-b}{p}; \frac{p-c}{p}\right).$$

Из выражений для барицентрических координат точек M, I и N следует, что эти точки лежат на одной прямой и $MN = 2MI$. Отсюда вытекает, что точка N тоже описывает окружность (рис.11).

Упражнение 9. Докажите это.

Точка Лемуана

Точкой Лемуана называется точка L, сумма квадратов расстояний от которой до сторон треугольника минимальна. Ее барицентрические координаты –

$$a^2\big/\left(2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)\right), b^2\big/\left(2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)\right),$$

$$c^2\big/\left(2\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)\right).$$

Вычисления по формуле (1) дают

$$OL^2 = R^2 - 6Rrt - 3r(r+4R)t^2,$$

$$IL^2 = 2r(r+R)t - 3r(r+4R)t^2,$$

где $t = 2Rr\big/\left(p^2 - r^2 - 4Rr\right)$. Исключая из этих соотношений t, получаем, что L движется по кривой, уравнение которой

$$k_1(x - x_0)^2 + k_2(y - y_0)^2 = \text{const},$$

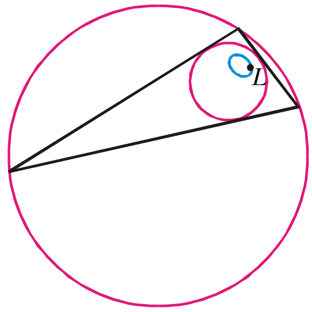

Рис. 12

где $k_1 \neq k_2$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Такая кривая является эллипсом (рис. 12).

Точки Торричелли

Если на сторонах треугольника ABC построить во внешнюю сторону правильные треугольники ABC_1, BCA_1 и ACB_1, то прямые A_1A, B_1B и C_1C пересекутся в одной точке T_1, *называемой первой точкой Торричелли* (рис.13,*а*). Эта точка обладает замечательным экстремальным свойством: если наибольший угол треугольника меньше 120°, то сумма расстояний от вершин треугольника до точки T_1 меньше, чем до любой другой точки плоскости.

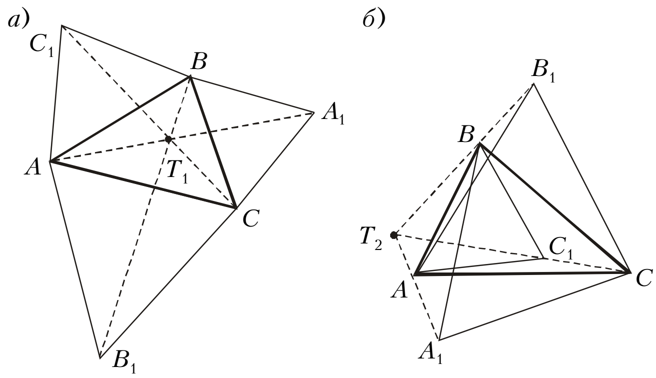

Рис. 13

Существует и вторая точка Торричелли T_2, она получается аналогичным образом, если правильные треугольники построить внутрь треугольника ABC (рис.13, *б*).

Координаты точек, T_1 и T_2 пропорциональны числам

$$a/\sin(\angle A \pm \pi/3), \ b/\sin(\angle B \pm \pi/3), \ c/\sin(\angle C \pm \pi/3).$$

Для точек Торричелли выражения для расстояний до точек O и I получаются довольно сложными. Однако можно заметить, что при переходе от одной из этих точек к другой в выражениях для расстояний меняется знак при p. Таким образом, траектории этих точек являются двумя частями одной кривой. Можно показать, что эта кривая имеет четвертый порядок.

Неподвижные точки

И наконец, укажем несколько точек, остающихся при вращении треугольника неподвижными. Это, прежде всего, центры гомотетий вписанной и описанной окружностей треугольника. Кроме того, неподвижным остается центр тяжести треугольника с вершинами в точках касания сторон треугольника Понселе с вписанной окружностью. Для доказательства достаточно заметить, что эта точка лежит на прямой OI и делит отрезок OI в отношении, не зависящем от p.