С другой стороны,

$$m-n=x^2+y^2-n=y^2-\left(n-x^2\right)\le y^2-(y-1)^2=$$

$$=2y-1\le 2\sqrt{2}\sqrt[4]{n}+1\,.$$

Осталось заметить, что при $n>10000$

$$2\sqrt{2}\sqrt[4]{n}+1<3\sqrt[4]{n}\,.$$

А.Голованов

М1838. *На плоскости взято конечное число красных и синих прямых, среди которых нет параллельных, так, что через любую точку пересечения одноцветных прямых проходит прямая другого цвета. Докажите, что все прямые проходят через одну точку.*

Предположим противное. Рассмотрим синюю прямую l; пусть A, B – две наиболее удаленные друг от друга точки пересечения l с красными прямыми, m и n – красные прямые, проходящие через A и B; C – точка пересечения m и n (рис.1). Тогда через C проходит синяя прямая p, которая пересекает l в какой-то точке D отрезка AB, иначе A и B – не наиболее удаленные.

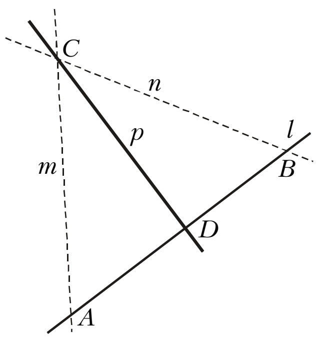

Рис. 1

Рассмотрим все четверки прямых l', m', n', p', расположенных как l, m, n, p (l', p' – одного цвета; m', n' – другого; m', n', p' пересекаются в одной точке; точка пересечения p' и l' лежит между точками пересечения l' с m' и n'), и выберем среди них такую, в которой прямые l', m', n' образуют треугольник наименьшей площади (рис.2). Тогда через точку D' проходит прямая q', одноцветная с m'. Она пересекает либо отрезок $B'C'$, либо $A'C'$ (пусть, для определенности, $B'C'$). Тогда прямые n', l', p', q' образуют конфигурацию с треугольником меньшей площади. Получили противоречие.

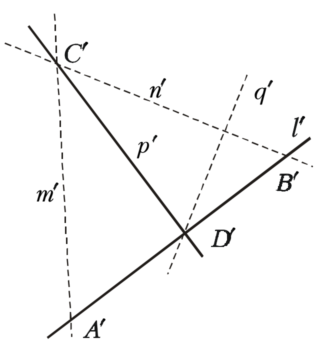

Рис. 2

В.Дольников, И.Богданов

М1839. *Пусть* $0<x<\dfrac{\pi}{4}$. *Докажите, что*

$$(\cos x)^{\cos^2 x}>(\sin x)^{\sin^2 x},$$

а также

$$(\cos x)^{\cos^4 x}<(\sin x)^{\sin^4 x}.$$

На первый взгляд кажется, что одно из неравенств противоречит другому, но это не так.
Рассмотрим

$$f(y)=\cos^y x-\sin^y x\,,$$

где $0<x<\dfrac{\pi}{4}$, $y\ge 0$. Имеем: $f(0)=0$, $f(y)>0$ при $y>0$, $f(y)\to 0$ при $y\to\infty$. Далее,

$$f'(y)=\cos^y x\ln\cos x-\sin^y x\ln\sin x=$$

$$=\cos^y x\left(\ln\cos x-\operatorname{tg}^y x\ln\sin x\right),$$

поэтому $f'(y)$ имеет единственный корень при $y>0$, так как функция $g(y)=\operatorname{tg}^y x$ монотонна. Из равенства

$$f(2)=f(2)\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=f(4)$$

следует, что $f'(2)>0$, $f'(4)<0$.
Перепишем первое неравенство:

$$\cos^2 x\ln\cos x>\sin^2 x\ln\sin x\,,$$

что эквивалентно первому неравенству задачи. Аналогично, $f'(4)<0$, или

$$\cos^4 x\ln\cos x<\sin^4 x\ln\sin x\,,$$

что эквивалентно второму неравенству задачи.

В.Сендеров

М1840. *В сферу вписаны несколько правильных тетраэдров так, что каждые два из них имеют общую вершину. Докажите, что все тетраэдры имеют общую вершину.*

Поначалу заметим, что все наши тетраэдры равны; можно считать, что ребро каждого из них равно 1. При этом, если два из них имеют две общие вершины, т.е. общее ребро, то они совпадают.
Два тетраэдра T_1 и T_2 имеют общую вершину A (только одну). На сфере найдется окружность ω, на которой расположены остальные шесть вершин тетраэдров T_1 и T_2. Отметим свойство окружности ω: если один конец ее хорды длины 1 является вершиной T_1 либо T_2, то другой конец хорды тоже является вершиной T_1 или T_2 соответственно.
Предположим, что среди наших тетраэдров нашелся тетраэдр T_3, для которого точка A не является вершиной. Тогда есть точка B – общая вершина тетраэдров T_3 и T_1, и точка C – общая вершина тетраэдров T_3 и T_2. Отрезок BC является ребром тетраэдра T_3 и хордой длины 1 окружности ω. В силу свойства окружности ω точки B и C, обе сразу, должны являться вершинами и тетраэдра T_1, и тетраэдра T_2, что противоречит факту.

В.Произволов

Ф1848. *При движении точки по прямой график зависимости ее скорости от координаты представляет в выбранном масштабе четверть окружности (рис.1). Найдите ускорение точки в конце отрезка – когда скорость спадает до нуля. Найдите также время движения на отрезке* $(0;\,x_0)$.

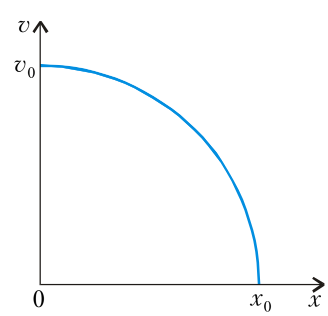

Рис. 1

Такая зависимость между скоростью точки и ее координатой получается при гармонических колебаниях. Проще всего записать энергетический баланс, на-