координаты центра этой клетки. Вертикальные столбцы клеток, для которых $x = pn$, и горизонтальные строки клеток, для которых $y = qn$ (p, q – целые числа), назовем дорогами. Пересечения дорог назовем перекрестками. Из условия следует, что «танк» может двигаться только по дорогам, а менять направление движения – только на перекрестке.

Покажем, что площадь любой фигуры, ограниченной следом «танка», при делении на n дает в остатке 1. Спроецируем фигуру, ограниченную следом, на ось OX и рассмотрим полоску клеток, содержащих эту проекцию (ниже под проекцией фигуры мы будем подразумевать эту полоску). Очевидно, эта полоска начинается и заканчивается перекрестком и состоит из $n(m-1)+1$ клеток, где m – число перекрестков в полоске. Применим индукцию по m. Если $m = 2$, то фигура, ограниченная следом, является прямоугольником с основанием $a = n - 1$ и высотой $b = tn - 1$, где t – натуральное число. Тогда $ab = (n-1)(tn-1) = n(tn-t-1)+1$, и база индукции установлена. Пусть утверждение доказано для всех фигур, у которых $m = 2, \ldots, k$. Рассмотрим любую ограниченную следом «танка» фигуру F, у которой $m = k+1 \ge 3$. В этом случае проекция фигуры содержит хотя бы один промежуточный (отличный от крайних) перекресток. Рассмотрим вертикальную дорогу, проходящую через этот перекресток. Ясно, что эта дорога пересекает внутренность фигуры F. Следовательно, на этой дороге встретится r участков ($r \ge 1$), каждый из которых начинается и заканчивается перекрестками, принадлежащими следу «танка», а между ними будут только внутренние клетки фигуры F. Легко понять, что если «танк» пройдет через все эти участки, то он разобьет фигуру F на $r + 1$ других фигур: $F_1, F_2, \ldots, F_{r+1}$, каждая из которых также ограничена следом «танка». Поскольку проекции фигур $F_1, F_2, \ldots, F_{r+1}$ содержат не более k перекрестков, то по индукционному предположению их площади равны $S(F_1) = p_1n+1$, $S(F_2) = p_2n+1$, … …, $S(F_{r+1}) = p_{r+1}n+1$, где $p_1, p_2, \ldots, p_{r+1}$ – некоторые натуральные числа. Пусть каждый из r участков содержит $q_1, \ldots, q_r$ внутренних перекрестков. Тогда площадь фигуры F удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned}S(F) &= S(F_1)+\ldots+S(F_{r+1})+\\&\quad+\left(n(q_1+1)-1\right)+\ldots+\left(n(q_r+1)-1\right)=\\&=(p_1n+1)+\ldots+(p_{r+1}n+1)+n(q_1+\ldots+q_r+r)-r=\\&=n(p_1+\ldots+p_{r+1}+q_1+\ldots+q_r+r)+(r+1)-r=\\&=n(p_1+p_2+\ldots+p_{r+1}+q_1+\ldots+q_r+r)+1.\end{aligned}$$

Индукция закончена.

Пусть теперь площадь ограниченной следом «танка» фигуры равна 2002. Тогда выполнено условие $2002 = pn + 1$, где p – некоторое натуральное число. Отсюда вытекает, что $pn = 2001 = 3\cdot 23\cdot 29$, т.е. n является натуральным делителем числа 2001, причем $n \ge 3$. Заметим, что дороги разделяют между собой кварталы (квадраты со стороной $n - 1$). Очевидно, площадь любой ограниченной следом «танка» фигуры не меньше, чем площадь одного квартала. Следовательно, $(n-1)^2 \le 2002$, откуда вытекает, что $n \le 45$. Таким образом, n может принимать максимум три значения: 3, 23 и 29.

При $n = 3$ легко получить требуемую площадь. Для этого «танк» должен сделать 1 ход по горизонтали и 334 хода по вертикали, а потом те же ходы в обратном направлении. В результате его след ограничит прямоугольник размером 2×1001. Аналогично, при $n = 23$ «танк» должен сделать 1 ход по горизонтали и 4 хода по вертикали. Ясно, что мы получим прямоугольника размером 22×91.

Рассмотрим $n = 29$. Заметим, что в этом случае площадь квартала равна $28^2 = 784$. Поскольку $784\cdot 3 > 2002$, то искомая фигура содержит не более двух кварталов. Но тогда ее площадь не превосходит площади прямоугольника размером 28×57. Но эта площадь равна $28\cdot 57 = 1596 < 2002$. Следовательно, случай $n = 29$ отпадает.

А.Малеев, С.Волчёнков

М1834. *Для действительных чисел x, y, z докажите неравенства:*

а) $x^6y^6 + x^6z^6 + y^6z^6 + 3x^4y^4z^4 \ge$
$$\ge 2\left(x^3+y^3+z^3\right)x^3y^3z^3,$$

б) $x^6 + y^6 + z^6 + 3x^2y^2z^2 \ge 2\left(x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3\right)$.

Первое решение. Если хотя бы одно из чисел x, y, z равно 0, то первое неравенство очевидно, а второе хорошо известно. Далее полагаем все числа x, y, z положительными. Разделим первое неравенство на $x^3y^3z^3$ и введем новые обозначения для $\sqrt{\frac{xy}{z}}$, $\sqrt{\frac{yz}{x}}$, $\sqrt{\frac{zx}{y}}$. Легко видеть, что в результате указанных действий получилось второе неравенство. Таким образом, остается доказать только второе неравенство. Сначала разделим его на $x^2y^2z^2$ и введем новые обозначения: $a = \frac{xy}{z^2}$, $b = \frac{yz}{x^2}$, $c = \frac{xz}{y^2}$. При этом $abc = 1$. Перепишем неравенство:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3 \ge 2(a+b+c).$$

Выберем два из трех чисел, которые лежат по одну сторону от 1. Пусть это a и b. Перепишем неравенство в следующем виде:

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 + 2(a-1)(b-1) + (ab-1)^2 \ge 0.$$

Но сумма трех неотрицательных слагаемых неотрицательна.

Этим завершено доказательство обоих неравенств.

Второе решение. Поскольку неравенства задачи эквивалентны, докажем лишь первое из них; очевидно, при этом достаточно ограничиться неотрицательными значениями переменных. Мы будем опираться на следующую простую, но очень эффективную при доказательстве неравенств теорему.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, $f(a) \ge 0$ и $f'(x) \ge 0$ при $x > a$, то $f(x) \ge 0$ при $x \ge a$.

Приступим к решению задачи: считая, без ограничения общности, $x \ge y \ge z \ge 0$, рассмотрим

$$\begin{aligned}f(x) &= x^6y^6 + y^6z^6 + z^6x^6 +\\&\quad+ 3x^4y^4z^4 - 2\left(x^3+y^3+z^3\right)x^3y^3z^3.\end{aligned}$$