

ния между клином и столом клин останется неподвижным?

М.Учителев

Ф1865. В сосуде объемом $V = 100$ л находится гелий при давлении $p = 0,5$ атм и температуре $T = 350$ К. Давление снаружи немного возросло, и объем сосуда изменился, при этом температура газа увеличилась на $\Delta T = 1$ К, а в окружающую среду было отдано количество теплоты $Q = 20$ Дж, после чего в сосуде установилось равновесие. Оцените, на сколько изменились объем сосуда и давление газа в сосуде.

А.Простов

Ф1866. Заряд q находится на расстоянии h от бесконечной слабопроводящей плоскости. Заряд быстро перемещают параллельно плоскости на расстояние $2h$, так что распределение зарядов не успевает измениться. Сколько тепла выделится, когда распределение зарядов снова установится? Сколько еще выделится тепла, если заряд быстро сдвинуть на h перпендикулярно плоскости?

Е.Антышев

Ф1867. Два генератора гармонических колебаний с частотами 50 Гц и 400 Гц включены, как показано на

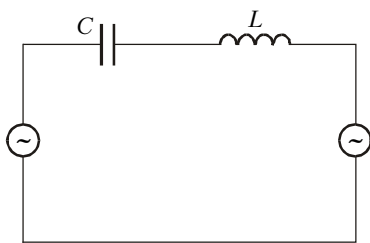


Рис. 5

рисунке 5: «общие» их выходы соединены непосредственно, а «сигнальные» — через последовательно соединенные катушку индуктивностью 1 Гн и конденсатор емкостью 1 мкФ. Амплитуда напряжения каждого генератора 10 В, сопротивление провода, которым намотана катушка, 1 Ом, в остальном элементы цепи можно считать идеальными. Найдите максимальный заряд конденсатора и среднюю мощность, переходящую в тепло.

З.Рафаилов

Решения задач М1831—М1840, Ф1848—Ф1852

М1831. В наборе 20 гирек, массы которых различны. Среди любых одиннадцати из них можно выбрать две, общая масса которых равна 100 г. Докажите, что общая масса всех 20 гирек набора равна 1000 г.

Будем говорить, что две гирьки образуют пару, если их суммарная масса равна 100 г. Ввиду того, что массы всех гирек различны, каждая гирька может входить не более чем в одну пару. Наша цель — показать, что 20 гирек набора распадаются на 10 пар.

Возьмем три коробки: A , B и C . В коробку A положим какие-то 11 гирек, в коробку B положим остальные 9 гирек, коробку C оставим пока пустой.

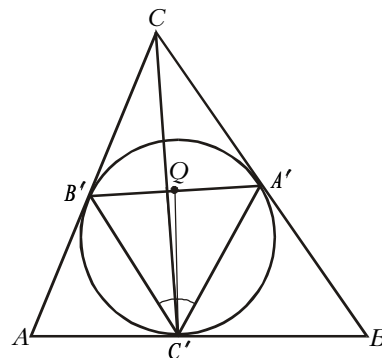
В коробке A найдется пара, одну из гирек этой пары переложим в C , а из B тоже одну (любую) гирьку переложим в A .

В коробке A снова найдется пара, одну из гирек этой пары переложим в C , а из B одну гирьку переложим в A .

Так будем поступать до тех пор, пока коробка B станет пустой, а в коробке A обнаружится последняя, нужная нам, десятая пара.

В.Произволов

М1832. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается его сторон в точках A' , B' , C' (рис.1). Точка Q — середина $A'B'$. Докажите, что углы $B'C'C$ и $A'C'Q$ равны.



Пусть P — вторая точка пересечения прямой CC' с окружностью (рис.2). Так как углы $C'B'A$ и $C'PB'$ равны, треугольники CPB' и $CB'C'$ подобны. Следовательно, $PB'/B'C' = CP/CB'$. Аналогично, из подобия треугольников CPA' и $CA'A'$ имеем $CP/CA' = PA'/A'C'$.

Значит, $A'C' \cdot B'P = B'C' \cdot A'P$, а так как четырехугольник $PA'C'B'$ — вписанный, по теореме Птолемея $PB' \cdot A'C' + PA' \cdot B'C' = PC' \cdot A'B'$, т.е. $B'P \cdot A'C' = C'P \cdot A'B'/2 = C'P \cdot A'Q$. Поэтому треугольники $C'PB'$ и $C'QA'$ подобны, откуда и следует утверждение задачи.

Отметим, что в любом треугольнике прямые, соединяющие его вершины и точки касания противоположных сторон со вписанной окружностью, пересекаются в одной точке, которая называется точкой Жергонна. Прямые, симметричные медианам треугольника относительно его биссектрис, также пересекаются в одной точке, которая называется точкой Лемуана. Таким образом, утверждение задачи допускает следующую красивую формулировку: точка Жергонна треугольника ABC совпадает с точкой Лемуана треугольника $A'B'C'$.

А.Заславский

М1833. Фигура «танк» ходит по горизонтали или вертикали ровно на n клеток ($n > 1$), закрашивая все клетки, по которым прошла. Сделав несколько ходов на бесконечной клетчатой доске, «танк» вернулся на исходную позицию. Оказалось, что его след нигде себя не пересек. При каких n площадь, ограниченная следом «танка», может оказаться равной 2002?

Ответ: $n = 3$ и $n = 23$.

На бесконечной клетчатой доске введем систему координат так, чтобы центр исходной позиции «танка» был началом этой системы, а оси были направлены параллельно линиям сетки. Тогда каждой клетке однозначно соответствует пара неотрицательных чисел $(x; y)$ —