Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 2003 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1– 2003» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1846» или «Ф1853». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1852 и М1853 предлагались на Санкт-Петербургской математической олимпиаде 2002 года.

Задачи М1846—М1855, Ф1853—Ф1862

М1846. Докажите, что для любого натурального n и любого натурального $k \le n$ выполняется неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k \le 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}.$$

В.Орлов (ученик 10 кл.)

М1847. В 8 банках сидят 80 пауков. Разрешается выбрать любые две банки, суммарное число пауков в которых четное, и пересадить часть пауков из одной банки в другую, чтобы их стало поровну. При любом ли начальном распределении пауков в банках с помощью нескольких таких операций можно добиться того, чтобы в каждой банке оказалось одинаковое число пауков?

В.Каскевич

М1848. В треугольник ABC вписана окружность с центром O, которая касается сторон в точках A_1, B_1, C_1 (рис.1). Отрезки AO, BO, CO пересекают окружность в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что площадь треугольника $A_2B_2C_2$ равна половине площади шестиугольника $B_1A_2C_1B_2A_1C_2$.

В.Произволов

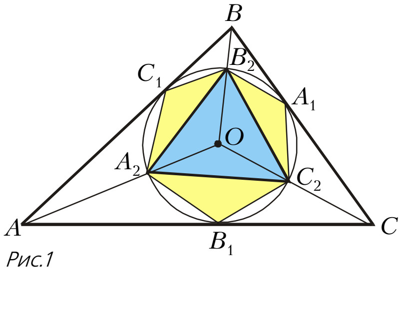

Рис.1

М1849. Простое число p удовлетворяет равенству

$$p^2 = 2^n \cdot 3^m + 1,$$

где n и m – целые неотрицательные числа. Докажите, что $p \le 17$.

В.Сендеров

М1850. Числа натурального ряда от 1 до $n(n+1)$ записаны последовательно красным и синим цветами в следующий очередности. Первые n чисел – красные, затем одно – синее, затем $n-1$ чисел – красные, затем два – синие и т.д., наконец, одно число – красное и последние n чисел – синие. Таким образом, убывающие по численности группы красных чисел перемежаются возрастающими по численности группами синих чисел. Докажите, что сумма синих чисел вдвое больше суммы красных чисел.

В.Произволов

М1851. Нарисованы координатные оси Ox, Oy и график функции $y = \frac{1}{8x}$. Масштаб не указан. Пользуясь только циркулем, постройте точку $(1;\ 1)$.

С.Токарев

М1852. Дано натуральное число n. В интервале $\left(n^2;\ n^2+n\right)$ выбраны различные натуральные числа a и b. Докажите, что в этом интервале нет натуральных делителей числа ab, отличных от a и b.

С.Иванов

М1853. С числом разрешается производить следующие операции:

1) возвести в любую натуральную степень;
2) отрезать последние две цифры, умножить образованное ими число на 3 и прибавить к числу, образованному остальными цифрами.

Можно ли с помощью таких операций из числа 81 получить число 82?

К.Кохась

М1854*. Пусть $f(x)$ – многочлен степени $m \ge 2$ с целыми коэффициентами. Докажите, что множество значений многочлена $f(x)$ в целых точках содержит бесконечную геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $f(x)=a(bx+c)^m$ (здесь a, b, c – целые числа, $a \neq 0$, $b \neq 0$).

Н.Осипов

М1855. Плоскости, параллельные граням прямоугольного параллелепипеда, разрезали его на меньшие параллелепипеды, которые окрасили в черный и белый цвета в шахматном порядке. Известно, что суммарный объем черных равен суммарному объему белых параллелепипедов. Докажите, что из черных можно составить параллелепипед P, а из белых можно составить параллелепипед Q так, что P и Q будут равны.

В.Произволов

Ф1853. В большой комнате на гладком горизонтальном твердом полу стоит кровать. Одна ее ножка чуть короче других, поэтому под нее пришлось подложить гладкий брусок. Оказалось, что трение совсем мало и брусок этот легко выбить – маленький упругий шарик, который пускают по полу со скоростью больше 1 м/с, с этим справляется. Задачу злоумышленнику усложнили – он может бросать шарик с уровня пола на расстоянии 3 м от бруска, а посредине между ним и бруском поставили ширму высотой 0,5 м. С какой минимальной скоростью нужно (вернее – не нужно!) бросить шарик, чтобы выбить брусок?

П.Коренев (ученик 10 кл.)

Ф1854. Петер и Пауль неторопливо бегают по футбольному полю (кажется, где-то в Баварии), причем расстояние между ними все время равно 50 м. Петер с постоянной по величине скоростью 2 м/с бегает по кругу радиусом 50 м, а Пауль бежит по прямой, проходящей через центр этого круга. Найдите максимальные значения скорости и ускорения Пауля. Считайте, что подолгу он на одном месте не стоит.

А.Фанатов

Ф1855. В системе на рисунке 2 все блоки невесомые, а нити невесомые и нерастяжимые. Считая массы всех грузов одинаковыми, найдите ускорения блоков. Свободные концы всех нитей вертикальны.

А.Блоков

Ф1856. Из тонкой жесткой проволоки согнули угол 90°, одну из сторон угла закрепили в вертикальном положении, другую – в горизонтальном (рис.3). На каждую из сторон надели маленькую шайбу массой M и соединили шайбы легким стержнем длиной L. Вначале этот стержень почти вертикален, затем от малого толчка система приходит в движение. Найдите максимальные скорости каждой из шайб. Трение отсутствует.

Р.Александров

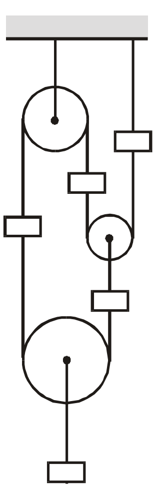

Рис.2

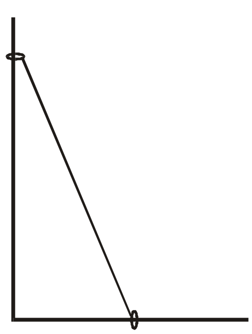

Рис.3

Ф1857. По гладкому горизонтальному столу скользит шайба и налетает на точно такую же неподвижную шайбу, едва ее коснувшись. После удара первая шайба отклонилась от первоначального направления на угол 1°, вторая шайба после удара стала двигаться под углом 80° к этому направлению. Какая часть начальной кинетической энергии системы перешла при ударе в тепло?

А.Простов

Ф1858. В теплоизолированном сосуде находится N молекул двухатомного газа при температуре T_1. При этих условиях начинается диссоциация молекул, которая практически прекращается при падении температуры в сосуде до T_2. При диссоциации одной молекулы поглощается энергия ε. Какая часть молекул продиссоциирует, и во сколько раз упадет давление в сосуде?

З.Рафаилов

Ф1859. Две медные монеты диаметром 1 см и толщиной 1 мм расположены на расстоянии 1 м друг от друга, причем плоскости монет перпендикулярны прямой, соединяющей их центры. На монеты наносят электрические заряды. Какими должны быть знаки зарядов и каково должно быть отношение их величин, чтобы сила взаимодействия между монетами упала до нуля? Интересный случай нулевых зарядов можете не рассматривать.

А.Повторов

Ф1860. К батарейке подключают «мостик», состоящий из пяти резисторов. Четыре из этих пяти резисторов имеют сопротивление R. Каким должно быть сопротивление пятого резистора, чтобы силы токов через какие-нибудь два резистора в схеме оказались одинаковыми и ни один из токов не был нулевым?

А.Зильберман

Ф1861. К батарейке напряжением 12 В подключают последовательно соединенные конденсатор емкостью 1 мкФ и катушку индуктивностью 1 Гн. В тот момент, когда ток через катушку максимален, параллельно ей подключают резистор сопротивлением 1 МОм, а когда ток через катушку снова становится максимальным и течет в ту же сторону, резистор отключают. Какое количество теплоты выделится при этом в резисторе? Какой заряд через него протечет?

Р.Катушкин

Ф1862. От шара радиусом 10 см, сделанного из органического стекла, осторожно отпиливают два маленьких кусочка так, что получаются две плосковыпуклые линзы – диаметр первой 1 см, диаметр второй вдвое больше. Линзы аккуратно склеивают плоскими поверхностями, как по-

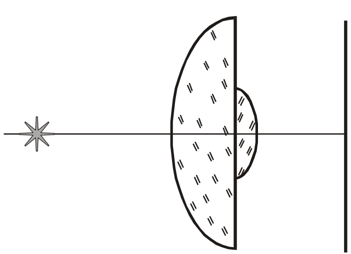

Рис.4

казано на рисунке 4. На главной оптической оси получившейся системы на расстоянии 1 м от нее помещают точечный источник света, а с другой стороны системы – экран. Как нужно расположить экран, чтобы освещенное пятно на нем имело минимальный диаметр? Чему он равен?

А.Очков