Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №4 за 2002 г.)

1. Покажем, что важное множество может состоять не менее чем из 24 клеток.

Любой составленный из клеток доски прямоугольник размером 1×8, 1×9 или 1×10 должен содержать не менее 2 клеток важного множества. Соответственно, в двух соседних верхних горизонталях доски должно быть не менее 4 клеток важного множества. Если мысленно убрать эти горизонтали, то из оставшейся части доски 8×10 можно образовать 8 прямоугольников размера 1×8, каждый из которых должен включать не менее 2 клеток важного множества. Таким образом, всего в важном множестве должно быть не менее $4+2\times 10=24$ клетки.

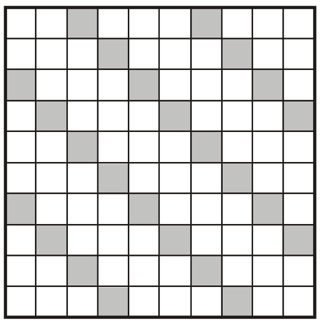

Рис. 1

Пример важного множества, состоящего из 24 клеток, показан на рисунке 1.

2. Покажем, как за три взвешивания определить, равен ли общий вес двух фальшивых монет весу двух настоящих. Разделим монеты на 4 кучки по 6 монет. Первым взвешиванием сравним вес первой и второй кучек; вторым взвешиванием – вес третьей и четвертой кучек. Рассмотрим возможные результаты взвешиваний.

1) Весы оба раза оказались в равновесии. В этом случае две фальшивые монеты могут быть только в одной кучке, причем их суммарный вес равен весу двух настоящих монет.

2) Весы оказались в равновесии только один раз. Обозначим результаты взвешиваний так: $A = B$, $C < D$ (A, B, C, D – какие-то кучки). Тогда в A и B находятся настоящие монеты, в C и D – фальшивые. Третьим взвешиванием на одну чашу весов помещаем кучки $A + B$, а на другую $C + D$. Общий вес двух фальшивых монет будет равен весу двух настоящих только в том случае, если весы при третьем взвешивании окажутся в равновесии.

3) Весы ни разу не оказались в равновесии. Обозначим результаты взвешиваний так: $A < B$, $C < D$. Если легкая фальшивая монета находится в кучке A, то более тяжелая – в кучке D, если же легкая фальшивая монета находится в кучке C, то более тяжелая – в кучке B. Как бы то ни было, две фальшивые монеты одновременно находятся либо в $A + D$, либо в $B + C$. Третьим взвешиванием сравниваем $A + D$ с $B + C$. Общий вес двух фальшивых монет будет равен весу двух настоящих только в том случае, если весы при третьем взвешивании окажутся в равновесии.

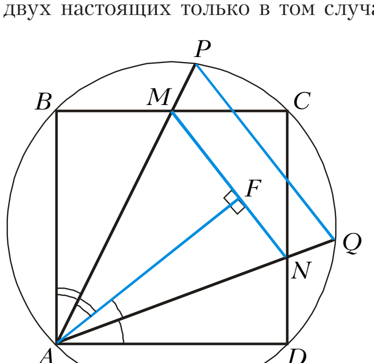

Рис. 2

3. Треугольник ABM отразим симметрично относительно гипотенузы AM, а треугольник ADN – относительно гипотенузы AN. Пусть при этом точка B перейдет в точку B', а точка D – в точку D'. Поскольку $\angle B'AM+\angle D'AN=45^\circ$, то точки B' и D' окажутся на одном луче с вершиной в точке A. Так как $AB = AB' = AD' = AD$, то точки B' и D' совпадают друг с другом – представляют одну и ту же точку. Введем для нее обозначение F (рис.2). Так как $\angle AFN = \angle AFM = 90^\circ$, то три точки M, F и N лежат на одной прямой. Итак, ΔAMN представляет собой объединение треугольников ΔAMF и ΔANF. При этом $\angle BMA = \angle AMN$, $\angle DAQ = \angle FAQ = 45^\circ - \angle FAM = 45^\circ - \angle BAM$. Отсюда

$$\angle APQ = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{AD}+\overset{\smile}{DQ}\right) = 45^\circ + \angle DAQ =$$

$$= 45^\circ + \left(45^\circ - \angle BAM\right) = 90^\circ - \angle BAM = \angle BMA = \angle AMN.$$

Поскольку $\angle APQ = \angle AMN$, то $PQ \parallel MN$.

4. Возьмем произвольное число M. Ясно, что M – его самый большой делитель. Все остальные делители, очевидно, не превосходят $\dfrac{M}{2}$, поэтому общее количество делителей числа M не превышает $\dfrac{M}{2}+1$. Отсюда следуют неравенства $B \le \dfrac{A}{2}+1$ и $\dfrac{A}{2} \le \dfrac{B}{2}+1$, поэтому $\dfrac{A}{2} \le \dfrac{\frac{A}{2}+1}{2}+1 = \dfrac{A}{4}+\dfrac{3}{2}$, и $A \le 6$. Кроме того, из условия следует, что $\dfrac{A}{2}$ – целое число, поэтому A – четное число.

Четных чисел, не превышающих 6, всего три: 2, 4 и 6. Проверим каждое отдельно:

1) Пусть $A = 2$. Это число имеет 2 делителя, поэтому $B = 2$. Но у числа B тоже 2 делителя, а вовсе не $A/2 = 1$. Не подходит.

2) Пусть $A = 4$. Это число имеет 3 делителя, поэтому $B = 3$. У числа 3 имеется 2 делителя, что как раз равно $A/2$. Это подходит.

3) Пусть $A = 6$. Это число имеет 4 делителя, поэтому $B = 4$. У числа 4 имеется 3 делителя, что как раз равно $A/2$. Это тоже подходит.

Итак, получается, что есть две возможности: $A = 4$, $B = 3$, а также $A = 6$, $B = 4$. В первом случае сумма $A + 2B$ равна 10, во втором случае она равна 14. Но и у 10, и у 14 количество делителей одинаково и равно 4.

5. Расчертим квадрат на единичные клетки, как показано на рисунке 3. Каждый вырезанный круг полностью содержится в некотором квадрате 2×2. Назовем такой квадрат *регионом*. Докажем, что если из квадрата вырезать область, представляющую собой объединение пяти регионов, то из оставшейся части всегда можно вырезать два прямоугольника размером 1×2.

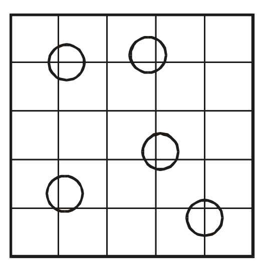

Рис. 3

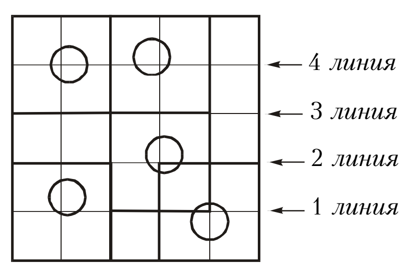

Рис. 4

Регион однозначно определяется положением его центра. Центр каждого региона находится на одной из четырех линий сетки (рис.4). Поскольку регионов пять, а линий, на которых лежат их центры, четыре, то либо 1-я и 2-я линии, либо 3-я и 4-я линии содержат не более двух центров регионов. Без ущерба для общности будем считать, что 1-я и 2-я линии содержат не более 2 центров регионов. Тогда возможны лишь 3 случая:

1) 1-я линия пустая (не содержит ни одного центра);

2) 2-я линия пустая;

3) 1-я и 2-я линии содержат ровно по одному центру.

В первом случае нижняя полоска (1×5) не пересекается ни с одним из пяти регионов (не имеет с ними ни одной общей клетки). Поэтому из нее можно вырезать два прямоугольника размером 1×2.

Для анализа второго случая закрасим в квадрате три «вертикальных» и четыре «горизонтальных» прямоугольника размером 1×2, как показано на рисунке 5. Поскольку 2-я линия пустая, то каждый из пяти регионов имеет общие клетки ровно с одним из семи закрашенных прямоугольников. Следовательно, по крайней мере два закрашенных прямоугольника обязательно останутся целыми.

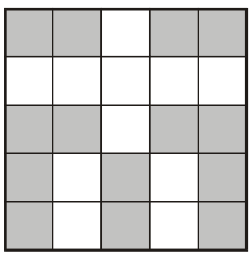

Рис. 5

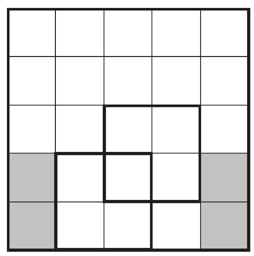

Рис. 6

Аналогично исследуется третий случай. Если регионы, центры которых находятся на 1-й и 2-й линиях, пересекаются, то из двух нижних полосок можно вырезать два «вертикальных» прямоугольника размером 1×2, как показано на рисунке 6. Если эти регионы не пересекаются, то можно вырезать «вертикальный» и «горизонтальный» прямоугольник размерами 1×2, как показано на рисунке 7.

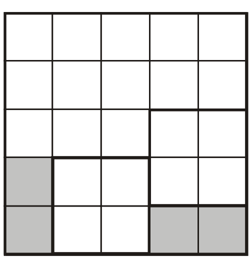

Рис. 7

Замечание. Как указал С.Волченков, более двух прямоугольников размером 1×2 из исходного квадрата вырезать невозможно.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Да. Если, например, дуть ритмично, в такт собственным колебаниям груза.

2. Да. Надо раскачивать дверь с частотой, равной собственной частоте колебаний двери. При резонансе амплитуда колебаний может достичь больших значений.

3. Энергия колебаний увеличивается благодаря периодическому изменению параметров системы, а именно – расстояния от точки подвеса до положения центра тяжести человека и качелей, при котором человек совершает работу.

4. При малом затухании амплитуда колебаний в режиме резонанса, а значит, и запасаемая системой энергия будут больше. А для этого потребуется большее время.

5. Нет. С ростом амплитуды колебаний моста увеличиваются потери энергии за период. Когда они сравняются с приростом энергии при ударе, дальнейшая раскачка прекратится.

6. При указанной скорости период собственных колебаний ледового покрытия совпадал с периодом колебаний, вызванных идущими автомашинами. Для предотвращения риска нужно было двигаться с бóльшими или меньшими скоростями.

7. Капитану удалось вывести катер из резонансной раскачки.

8. Для маятников *1* и *4*, а также *2* и *5*, поскольку у этих пар маятников одинаковые длины подвесов, а значит, и одинаковые периоды колебаний.

9. Это завибрировали струны, имеющие ту же собственную частоту колебаний, что и у пропетых нот.

10. Для более богатого набора собственных частот инструмента. Тон при увеличении размеров понижается.

11. Подносимые предметы служат резонаторами, усиливающими слабые звуки.

12. Камертоны обладают очень малым затуханием, поэтому резонанс у них острый, так что даже небольшая разница между их частотами приводит к тому, что один не откликается на колебания другого.

13. При некотором положении сердечника наступает электрический резонанс.

14. Резонанс в цепи можно ожидать на частоте генератора, в n = 1, 2, 3… раз меньшей собственной частоты колебательного контура.

15. Когда контур настроен в резонанс с колебаниями в волне.

16. Прием разумными короткими антеннами дает более слабый сигнал, но затем он усиливается в приемнике.

Микроопыт

В шуме наливающейся воды будет выделяться тон определенной высоты, так как полость бутылки служит резонатором. По мере заполнения бутылки длина резонирующего воздушного столба уменьшается, и высота слышимого тона растет.

Однозначно ли определяется треугольник?

2. *Указание.* Воспользуйтесь формулой Герона.

3. Радиусы r_a, r_b, r_c вневписанных окружностей однозначно определяют треугольник для любых положительных чисел r_a, r_b, r_c. Для доказательства этого утверждения воспользуйтесь соотношениями

$$h_a = \frac{2r_b r_c}{r_b + r_c}, \quad h_b = \frac{2r_c r_a}{r_c + r_a}, \quad h_c = \frac{2r_a r_b}{r_a + r_b}.$$

4. Соотношения (2) можно записать в эквивалентной форме

$$a : b : c = h_b : h_a : \frac{h_a h_b}{h_c},$$

откуда следует, что треугольник со сторонами h_b, h_a, $\frac{h_a h_b}{h_c}$ подобен треугольнику с соответственными сторонами a, b, c. Построив треугольник $A'B'C'$ такой, что $A'B' = \frac{h_a h_b}{h_c}$, $A'C' = h_b$, $C'A' = h_a$, опустим из вершины A' высоту $A'D'$. Отложив на луче $A'D'$ отрезок $A'D = h_a$, через точку D проведем прямую, параллельную $B'C'$. В пересечении с прямыми $A'B'$ и $A'C'$ получим точки B и C соответственно. Треугольник $A'BC$ – искомый.

5. Сначала перепишем равенства (7) в виде

$$a^2 = \frac{8}{9}m_b^2 + \frac{8}{9}m_c^2 - \frac{4}{9}m_a^2,$$

$$b^2 = \frac{8}{9}m_a^2 + \frac{8}{9}m_c^2 - \frac{4}{9}m_b^2, \qquad (*)$$

$$c^2 = \frac{8}{9}m_b^2 + \frac{8}{9}m_a^2 - \frac{4}{9}m_c^2.$$

Далее заметим, что в силу неравенства $\frac{x^2 + y^2}{2} \ge \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, справедливого для любых положительных чисел x и y (докажите это), имеем $\frac{m_1^2 + m_2^2}{2} \ge \left(\frac{m_1 + m_2}{2}\right)^2$, где m_1, m_2 – любая пара из набора длин медиан $\{m_a, m_b, m_c\}$. Привлекая далее неравенства (6) статьи, убеждаемся в том, что в правой части равенств ($*$) стоят положительные числа. Следовательно, уравнения ($*$) однозначно решаются относительно положительных чисел a, b, c.

6. Пусть в искомом треугольнике ABC точка O – точка пересечения медиан. Продлим медиану BB_1 на отрезок B_1M, равный B_1O. Тогда $AOCM$ – параллелограмм, в котором $MC = AO = \frac{2}{3}m_a$, $MO = \frac{2}{3}m_b$, $CO = \frac{2}{3}m_c$. Строим треугольник MOC по трем сторонам. Проводим в нем медиану CB_1 и продолжаем ее на отрезок $B_1A = CB_1$; продолжаем сторону MO на отрезок $OB = MO$. Вершины A, B, C искомого треугольника построены.

7. *Указание*. Площадь треугольника равна $\frac{1}{2}pq\sin\varphi$, с другой стороны, она равна $\frac{1}{2}pl\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}ql\sin\frac{\varphi}{2}$. Приравняв эти два выражения с учетом того, что $\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$, получаем требуемый результат.

Комбинированные задачи по механике

1. $s = \pi v\sqrt{3m/k}$. **2.** $\tau = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{m}{M} + \frac{1}{\sin^2\alpha}}$.

3. $s = \left(\frac{9\pi^2}{4} + 1\right)\frac{mg}{k}$. **4.** $N = mg$.

5. $v = c\frac{E_\gamma}{m_я c^2} = \frac{E_\gamma}{E} \approx 60$ м/с.

Московский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 2; 2/3. *Указание.* Пусть $t > 0$ – первая дробь, а $s > 0$ – вторая. Тогда $\frac{1}{t} = \frac{1}{s} - 1$, а $s = kt$, где $k = 3$ или $k = \frac{1}{3}$.

2. $\{0\} \cup [1/2; 1] \cup \left[\left(3+\sqrt{5}\right)/2; +\infty\right)$. *Указание*. После замены $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt[3]{1-2x}$ неравенство примет вид $a + b \le$ $\le \sqrt[3]{a^3 + b^3}$. Равносильное ему неравенство $ab(a+b) \le 0$ решается без труда.

3. 15. *Указание*. Треугольники ADB и MCB подобны, а $BM/AB = 5/3$.

4. $[-9/10; 0) \cup (2; 9/4) \cup (9/4; 19/8)$. *Указание*. Пусть $t =$ $= \lg x$, $f = \lg(a+1)$, $g = \lg(19-8a)$. Исходное уравнение приводится к виду $\frac{t^2 - 2ft + fg}{ft} = 0$ и имеет два различных корня t_1 и t_2 тогда и только тогда, когда $f^2 - fg > 0$, $ft \ne 0$, т.е. при $a \in (-1; 0) \cup (2; 9/4) \cup (9/4; 19/8)$.
При этом корни исходного уравнения $x_1 = 10^{t_1}$ и $x_2 = 10^{t_2}$ положительны и различны, а условие $x_1x_2 \ge$ $\ge 0{,}01$ равносильно тому, что $(a+1)^2 \ge 0{,}01$.

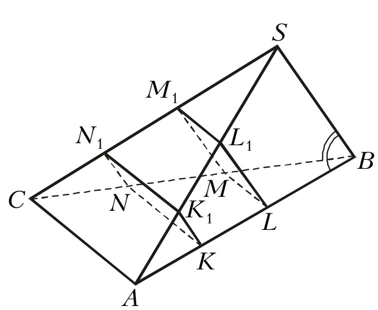

Рис. 8

5. 32/5. Сечением сферы плоскостью грани ABS (рис.8) является окружность, проходящая через точки K, L, K_1 и L_1, отрезки KL и K_1L_1 – равные хорды этой окружности, поэтому вписанный в окружность четырехугольник KLK_1L_1 является равнобокой трапецией. Из этого заключаем, что $AL = AL_1$ и $AK = AK_1$. Аналогично, $CN = CN_1$, $BL = BM$ и $SL_1 = SM_1$. Из доказанных равенств следует, что $CB + AS = AB + CS$. Наложим треугольник SBA на треугольник SBC так, чтобы отрезок SB остался общим, а луч BA наложился на луч BC (сделать это позволяет равенство углов $\angle SBA$ и $\angle SBC$). Точку, в которую при наложении попадет точка A, обозначим через A_1. Равенство $CB + A_1S = A_1B + CS$ приведет к равенству $CS = A_1S + CA_1$ в случае, если точка A_1 попадет между точек C и B, или к равенству $CS = A_1S - CA_1$ в случае, если точка C попадет между A_1 и B. Каждое из этих равенств противоречит неравенству треугольника, поэтому A_1 совпадает с C. Следовательно, $BC = BA$, $SA = CS$.
Итак, треугольники ABC и ASC равнобедренные. Плоскость, проходящая через точки B и S и середину ребра AC, содержит два перпендикуляра к AC и поэтому перпендикулярна AC. Следовательно, $SB \perp AC$.
Так как $BL = BM$, а треугольник ABC равнобедренный, то $LM \parallel AC$. Аналогично, $KN \parallel K_1N_1 \parallel L_1M_1 \parallel AC$. Поскольку $K_1N_1 \perp K_1K$ и $K_1N_1 \parallel AC$, то $AC \perp K_1K$. Если бы отрезки K_1K и SB не были параллельны, то ребро AC, будучи перпендикуляром к каждому из них, оказалось бы перпендикулярно плоскости ASB и, следовательно, ребру AB. Но это противоречит тому, что треугольник ABC равнобедренный. Поэтому $K_1K \parallel SB$. Отсюда и из равенства $AK = AK_1$ получаем, что треугольник SAB равнобедренный. Следовательно, равнобедренным является и треугольник SCB. Тогда $K_1K \parallel L_1L \parallel SB \parallel M_1M \parallel N_1N$.
Поэтому точки K, K_1, N_1, N, L, L_1, M_1 и M образуют два прямоугольника – KK_1N_1N и LL_1M_1M. Отсюда $L_1L = M_1M = 2K_1K$, и из подобия треугольников AK_1K и AL_1L получаем $AL = 2\,AK$, или $AK = KL$. Аналогично, условие $2KN = 3L_1M_1$ приводит к равенству $LB = 2KL$. Итак, $AK : KL : LB = 1 : 1 : 2$.
Отношение площади трапеции $KLMN$ к площади треугольника ABC равно 5 : 16 (треугольники LBM и KBN подобны с коэффициентом 2/3, поэтому площадь трапеции $KLMN$ составляет 5/9 площади треугольника KBN, а треугольники KBN и ABC подобны с коэффициентом 3/4 и их площади относятся как 9 : 16). Длина перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на плоскость ABC, относится к высоте SH пирамиды $SABC$, как 1 : 2 (это следует из того, что $CM_1 : CS =$ $= AL : AB$). Поэтому отношение объемов пирамид $SABC$ и M_1KLMN равно 32 : 5.

6. 1; −1/3; −1/2; −3/4. *Указание.* Пусть $y = \frac{1-x}{1+x}$, тогда вторая дробь равна $z = -\frac{y^2 + y - 1}{2y^2 - 6y - 1}$, и остается выяснить, при каких целых $y \ne -1$ будет целым число z. Заведомо не годятся значения y, при которых $\left|\frac{y^2 + y - 1}{2y^2 - 6y - 1}\right| < 1$. Остальные целые значения y следует просто перебрать.

Вариант 2

1. $(0; 2]$.

2. $\arccos\sqrt{2/3}$. Вторая и третья сферы касаются друг друга внешним образом, поэтому $AB = 2$. Обе сферы могут касаться первой сферы как внешним, так и внутренним образом. Невозможен случай, когда одно из этих касаний внешнее, а другое – внутреннее (тогда центры их лежали бы на одной прямой, из чего следовало бы, что точка O лежит в плоскости γ, а это противоречит условию задачи).
Возможны два случая. Первая сфера либо касается каждой из двух других внешним образом, либо касается каждой из

них внутренним образом. В первом случае $OA = OB = \sqrt{6}+1$, а проекции $O'A$ и $O'B$ этих отрезков на плоскость γ равны (из теоремы Пифагора) $\sqrt{6+2\sqrt{6}}$. Из теоремы косинусов для треугольника $AO'B$ получаем

$$\cos\angle AO'B = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Во втором случае $OA = OB = \sqrt{6}-1$. Аналогично получаем $\cos\angle AO'B = -\sqrt{\frac{2}{3}}$.

В первом случае угол $AO'B$ острый, а во втором – тупой, при этом угол между прямыми $O'A$ и $O'B$ равен в обоих случаях $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$. Так как $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{16}{24}} > \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$, получаем $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}} < \arccos\frac{4}{5}$.

3. $300/13$ км. *Указание*. Пусть $AB = x$, а v_1 и v_2 – скорости велосипедиста в начале и в конце пути от A до C. Участок AB велосипедист прошел за время $\frac{x}{v_1}$, BC – за время $\frac{75-x}{v_2}$. Поскольку $v_1 < v_2$, а по условию $\frac{x}{75-x} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 < 1$, то $x < \frac{75}{2}$, т.е. последние 18 км велосипедист ехал со скоростью v_2. Кроме того, $x \ge 2$.

Если $x \ge 18$, получаем уравнение $\frac{x}{75-x} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$, а при $2 \le x < 18$ – уравнение $\frac{x}{75-x} = \frac{x^2}{(9+x)^2}$.

4. 3. Из параллельности отрезков BX и CD получаем равенства $\angle DCX = \angle BXC$ и $\angle CDX = \angle BXA$, а из параллельности отрезков CX и BA – равенства $\angle BXC = \angle XBA$ и $\angle BAX = \angle CXD$. Из того, что четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, следует, что $\angle BAX + \angle DCX + \angle BCX = \angle BAX + \angle DCB = 180^\circ = \angle BAX + \angle ABX + \angle AXB$, откуда (пользуясь равенством $\angle ABX = \angle DCX$) заключаем, что $\angle BCX = \angle AXB$. Полученные равенства показывают, что треугольники ABX, BXC и XCD попарно подобны друг другу. Тогда $AX : BC = BX : XC$ и $BC : DX = BX : XC$, откуда $AX : BC = BC : DX$, или $BC^2 = AX \cdot DC = 9$, и $BC = 3$.

5. $(2; +\infty)$. *Указание*. Данное уравнение при любом a имеет 2 корня x_1 и x_2. Пусть $\alpha = \operatorname{arctg} x_1$, $\beta = \operatorname{arctg} x_2$. По условию задачи должно выполняться неравенство $\alpha + \beta > \frac{\pi}{4}$, что равносильно системе

$$\begin{cases} \alpha+\beta > 0, \\ \operatorname{ctg}(\alpha+\beta) < 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0, \\ \dfrac{1 - x_1x_2}{x_1+x_2} < 1. \end{cases}$$

Осталось заметить, что $x_1 + x_2 = 2a - 1$, а $x_1x_2 = a - 4$, и решить полученную систему относительно a.

6. $\frac{1}{4}\left(3+\sqrt{8}-\sqrt{11}\right)$. Нахождение минимального значения выражения $(x+y-z)^2$ сводится к нахождению минимального значения выражения $|2(x+y-z)| = |3(x+y)-(y+z)-(z+x)|$, которое совпадает с одним из чисел $|\pm a \pm b \pm c|$, где $a = |3(x+y)|$, $b = |y+z|$ и $c = |z+x|$. Из условия задачи получаем

$$\begin{cases} 3 \le a \le \sqrt{12}, \\ \sqrt{8} \le b \le 3, \\ \sqrt{10} \le c \le \sqrt{11}. \end{cases} \qquad (*)$$

Так как каждое из чисел a, b и c больше 2, но меньше 4, справедливы неравенства $a + b - c > 0$, $b + c - a > 0$ и $c + a - b > 0$. Поэтому числа $|\pm a \pm b \pm c|$ совпадают с одним из чисел $a + b - c$, $b + c - a$, $c + a - b$ и $a + b + c$. Следовательно, число $|\pm a \pm b \pm c|$ не меньше меньшего из минимальных значений выражений $a + b - c$, $b + c - a$ и $c + a - b$ при условиях $(*)$.

При выполнении условий $(*)$ минимальное значение выражения $a + b - c$ равно $3+\sqrt{8}-\sqrt{11}$, минимальное значение выражения $b + c - a$ равно $\sqrt{8}+\sqrt{10}-\sqrt{12}$, минимальное значение выражения $c + a - b$ равно $\sqrt{10}+3-3 = \sqrt{10}$. Заметив, что

$$3+\sqrt{8}-\sqrt{11} < \sqrt{8}+\sqrt{10}-\sqrt{12},$$

получаем, что число вида $|\pm a \pm b \pm c|$ не меньше чем $3+\sqrt{8}-\sqrt{11}$. Это значение достигается для решения системы

$$\begin{cases} 3x+3y = 3, \\ y+z = -\sqrt{8}, \\ z+x = \sqrt{11}. \end{cases}$$

Вариант 3

1. $7/2$. *Указание*. Исходная система определяет прямоугольную трапецию с основаниями 5 и 2 и высотой 1.

2. $\left[-\frac{59}{2}; \frac{1}{2}\right] \cup \left(2; \frac{5}{2}\right)$.

3. 8. *Указание*. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, найдите отношение радиусов r и r_1 окружностей, а затем и сами радиусы, после чего найдите AB и примените теорему синусов для отыскания радиуса описанной окружности.

4. 1; $-7/23$. *Указание*. Уравнение равносильно системе $\sin|x| \ge 0$, $5\sin x + 3\cos x + \sqrt{2} = 0$. Кроме того, $\operatorname{tg}|x| = \sin|x|/\cos x$. Поэтому $\operatorname{tg}|x|$ имеет тот же знак, что и $\cos x$. Возможные значения $\operatorname{tg} x$ найдите из уравнения $23\operatorname{tg}^2 x + 30\operatorname{tg} x + 7 = 0$, полученного возведением в квадрат уравнения $5\sin x + 3\cos x = -\sqrt{2}$ и делением на $\cos^2 x$ ($\cos x \ne 0$). После этого найдите и возможные значения $\operatorname{tg}|x|$.

5. $\left[-\sqrt{2}; -1\right) \cup \left(1; \sqrt{2}\right]$. *Указание*. Пусть $t = 3^{|ax|}$. Из неравенства системы следует, что $|ax| \le 2$, а из уравнения – что $\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \ge 0$. Выполнив замену $y = x^2$, $b = a^2 \ge 0$, получим систему

$$\begin{cases} by \le 4, \\ b - y = \dfrac{n^2}{4}. \end{cases}$$

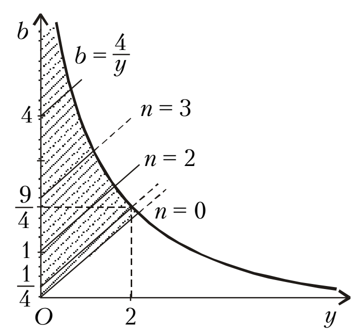

Рис. 9

Решения системы на плоскости Oyb (рис. 9) представляются семейством отрезков прямых $b = y + \frac{n^2}{4}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, находящихся в заштрихованной области между осью Ob и ветвью гиперболы $b = \frac{4}{y}$. Максимальное количество положительных решений y соответствует значениям b из промежутка $(1; 2]$.

6. 1. *Указание*. Две противоположные грани параллелепипеда – ромбы (рис.10). Пусть r – радиус вписанного шара, $h = 2r$ – его высота. Запишем объем параллелепипеда тремя способами:

$$V = a^2 h \sin\alpha = abh\sin\beta = abh\sin\gamma.$$

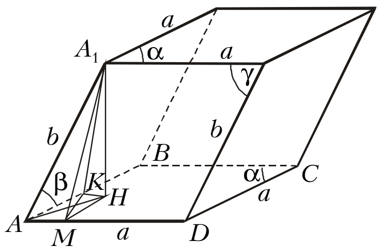

Рис. 10

Откуда

$$\sin\beta = \sin\gamma = \frac{a}{b}\sin\alpha .$$

Для высоты $h = A_1H$ параллелепипеда получим по теореме Пифагора $h = \sqrt{A_1A^2 - AH^2}$. Чтобы вычислить AH, примените теорему синусов к треугольнику KAM: $AH = KM/\sin\alpha$. Отрезок KM найдите по теореме косинусов из треугольника KAM:

$$KM = b\sqrt{2}\,|\cos\beta|\,\sqrt{1-\cos\alpha} .$$

Окончательно, после упрощений получим

$$h = b\sqrt{1 - \frac{2\cos^2\beta(1-\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}} .$$

Преобразуем функцию

$$f = \frac{2\cos^2\beta(1-\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}$$

к виду

$$f = \left(\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} - \frac{2a}{b}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \frac{4a}{b} - \frac{4a^2}{b^2} .$$

Ясно, что $f \ge \frac{4a}{b}\left(1 - \frac{a}{b}\right)$, причем равенство достигается лишь при $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{2a}$. При $a = 4$ и $b = 3$ это возможно. Осталось вычислить $r = \frac{h}{2}$.

Вариант 4

1. $-\sqrt{2}$.

2. $[-1; -7/8] \cup \{1\}$. *Указание*. Приведите неравенство к виду $\sqrt{1-x}\left(2\sqrt{1+x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \le 0$.

3. $\arccos\frac{29}{7\sqrt{19}}$. *Указание*. Введите в пространстве прямоугольную систему координат, направив оси Ox, Oy и Oz по ребрам AD, AB, AA_1 , запишите координаты векторов $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{KL}$, после чего воспользуйтесь формулой для скалярного произведения $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\widehat{\vec{a}\vec{b}}$.

4. 10 ч 40 мин того же дня.

5. $\left(\pm\arccos\frac{1}{5} + 2\pi k; (-1)^n \arcsin\frac{4}{5} + \pi n\right)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание*. После замены $a = \sqrt{13\cos x + 98\sin y}$, $b = \sqrt{13\cos x + 28\sin y}$ система приобретает вид

$$\begin{cases} a - b = 4, \\ 2b - \sqrt{a^2 - b^2 + 8} = 2 \end{cases}$$

и легко решается: $a = 9$, $b = 5$, после чего без труда находятся $\cos x$ и $\sin y$.

6. $7\sqrt{3}$. Обозначим стороны данного треугольника, лежащие против вершин A, B и C, через a, b и c соответственно (рис 11). Из условия задачи следует $c > b$. Пусть $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$, $\angle ADC = \beta$. Тогда $\angle B = \beta - \alpha$. Так как $c > b$, то $\beta < \pi/2$. Пусть окружность радиуса r, центр O которой лежит на прямой BC, проходит через точки A, D. Точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AD, следовательно, на луче DC. Поскольку треугольник OAD – равнобедренный, то $\angle DAO = \beta$. Из вышесказанного следует $\beta > \alpha$, поэтому точка C лежит на прямой BC между точками D и O. Тогда $\angle CAO = \beta - \alpha$, следовательно, треугольник ABO подобен треугольнику CAO. Значит,

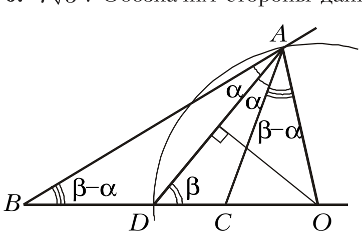

Рис. 11

$$\frac{r + BD}{r} = \frac{r}{r - CD} . \qquad (*)$$

Далее, по свойству биссектрисы треугольника ABC имеем

$$BD = \frac{ac}{b+c} ,\ CD = \frac{ab}{b+c} .$$

Подставляя эти выражения для BD и CD в $(*)$, получаем

$$\left(r + \frac{ac}{b+c}\right)\left(r - \frac{ab}{b+c}\right) = r^2 \Leftrightarrow r\left(c^2 - b^2\right) = abc .$$

Применяя формулу $R = \frac{abc}{4S}$, где S – площадь треугольника ABC, а R – радиус описанной окружности, находим $R = \frac{r\left(c^2 - b^2\right)}{4S}$. Теперь, используя данные из условий задачи, получаем ответ: $R = 7\sqrt{3}$.

Вариант 5

1. 3. **2.** $\pi(4n \pm 1)/4$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** -9, $\left(-1 + \sqrt{33}\right)/2$.
4. $\sqrt{7}$. **5.** (1; 27). **6.** 4/9.

7. $(a+1; 0) \cup (-a-3; +\infty)$ при $a \le -3$; $(a+1; 0) \cup (0; +\infty)$ при $-3 < a < -2$; $(0; +\infty)$ при $a = -2$; $(-a-3; a+1) \cup (0; +\infty)$ при $-2 < a < -1$; $(-a-3; 0) \cup (a+1; +\infty)$ при $a \ge -1$.

Указание. Поскольку знак выражения $\sin x + 2x$ совпадает со знаком x, неравенство равносильно такому:

$$x(x - a - 1)(x + a + 3) > 0 .$$

Осталось рассмотреть все возможные случаи расположения точек 0, $a + 1$ и $-a - 3$ на числовой оси и применить в каждом из случаев метод интервалов.

8. 2/3; $4\sqrt{15}/15$.

Вариант 6

1. $\pi(2n+1)/10$, $(-1)^n \pi/15 + \pi n/5$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2. $(-\infty; 1) \cup (3/2; 2]$. **3.** $\left(0; \log_{3/4}(1/4)\right)$. **4.** 9/2.

5. 4, 8, 16; 16, 8, 4. **6.** $3\sqrt{6}/4$.

7. 1) $x \in \boldsymbol{R}$ при $-3 < a < -2$;

$$\left(-\infty; 3 - \sqrt{a^2 + 5a + 6}\right) \cup \left(3 + \sqrt{a^2 + 5a + 6}; +\infty\right)$$

при $a \le -3$ и $a > -2$.

2) $\frac{-5 - \sqrt{13}}{2} < a \le -3$; $-2 \le a < \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}$.

8. 6.

Вариант 7

1. 1/4; 1/2. **2.** (1; 1). **3.** $(-4; -3{,}9] \cup \left(4; \sqrt{17}\right)$.

4. $\frac{2\pi n}{7}$, $\frac{2\pi m}{9}$, $n \ne 7l$, $m \ne 9l$, $n, m, l \in \boldsymbol{Z}$. *Указание*. Уравнение преобразуется к виду

$$64\cos^2\frac{x}{2}\cos^2 x\cos^2 2x = 1 .$$

После умножения левой и правой частей на $\sin^2\frac{x}{2}$ (при $\sin^2\frac{x}{2} \ne 0$) это уравнение приводится к виду

$$\sin^2 4x = \sin^2\frac{x}{2} \text{ , или } \cos 8x = \cos x .$$

5. 8. *Указание*. Точка M лежит на меньшей из дуг AB, так

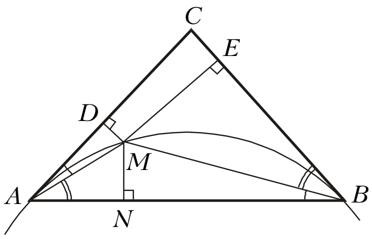

Рис. 12

как проектируется на стороны AC и BC (рис.12). Из подобия прямоугольных треугольников AMD и BNM ($\angle A = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AM} = \angle B$), а также ANM и BEM ($\angle A = \frac{1}{2}\overset{\smile}{BM} = \angle B$) имеем

$$\frac{MD}{MN} = \frac{AM}{BM} = \frac{MN}{ME}, \text{ откуда } ME = \frac{MN^2}{MD} = \frac{4^2}{2} = 8.$$

Далее находим угол M треугольника MNE:

$$\angle M = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \frac{1}{2}\left(180^\circ - \angle C\right) = 150^\circ$$

и искомую площадь.

6. 0; $\frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{5}\right)$. *Указание*. Положим $t = x - 1$, $b = a^3 - 3a^2 + a$ и приведем уравнение к виду $f(t) = b$. Так как функция f четная, то если уравнение имеет единственный корень t_0, то $t_0 = 0$. Отсюда

$$b = f(0) = 0.$$

Если $t \neq 0$, то $f(t) < f(0)$, так что при $b = 0$ уравнение действительно имеет ровно один корень.

Вариант 8

1. $(-\infty; 1/3)$. **2.** $\pi(2n+1)/10$, $n \in \mathbf{Z}$. **3.** $15\sqrt{15}/32$.

4. $(-\infty; -2] \cup [-1; 0) \cup (0; 1] \cup [2; +\infty)$. *Указание*. Положив $t = 2|x|$, $y = 2\log_2 t$, разложите левую часть на множители:

$$(y-2)(y+t-3) \geq 0.$$

Далее воспользуйтесь тем, что полученное неравенство равносильно неравенству

$$(t-4)(t-2) \geq 0$$

(докажите это!).

5. а) $2 + \sqrt{2}$; б) $\left(-\infty; 2-\sqrt{2}\right) \cup \{1\} \cup \left(2+\sqrt{2}; +\infty\right)$. *Указание*. Пусть

$$y = f(x) = x^2 + 2(a-2)x + a^2 - 4a = (x+a)(x+a-4),$$
$$g(y) = y^2 + (a+5)y - a^2 + 8a + 2.$$

Функция $y = f(x)$ принимает в точке $x_b = 2 - a$ минимальное значение $f(2-a) = -4$, а остальные свои значения (большие, чем -4) – по 2 раза. Поэтому исходное уравнение имеет единственный корень тогда и только тогда, когда $g(-4) = 0$, а $y_b = -\frac{a+5}{2} \leq -4$. Два корня исходное уравнение может иметь лишь в двух случаях: если оба корня y_1 и y_2 уравнения $g(y) = 0$ удовлетворяют условию $y_1 < -4 < y_2$, т.е. при $g(-4) = 0$; если $y_1 = y_2 > -4$.

Вариант 9

1. $(3/7; 1)$. **2.** $-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

3. 70. *Указание*. Воспользуйтесь формулой

$$(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$$

при $u = \sqrt[3]{20}$, $v = \sqrt[3]{50}$.

4. $(1; 64)$. **5.** $-11\pi/12$, $-7\pi/12$.

6. $c\Big/\left(2 + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right)$.

7. $(1/15; 1/8) \cup (1/8; 4/15] \cup \{1/2\} \cup [1; 4)$.

Вариант 10

1. $(-\infty; 1/3] \cup (2; +\infty)$. **2.** $(1; 1/2)$. **3.** $(-\infty; -2] \cup (2; +\infty)$.

4. 2. **5.** $-\pi/2$; $\pi/2$; $5\pi/6$.

6. $\frac{9}{4}\sqrt{15}$.

7. $(-\infty; 1)$. *Указание*. Первое из неравенств системы задает часть полосы $-1 \leq x \leq 1$, ограниченную сверху полуокружностью $y = \sqrt{1-x^2}$.

Если $a \leq 0$, то второму неравенству данной системы удовлетворяют координаты любой точки плоскости. Следовательно, искомая плоская фигура – выделенное множество на рисунке 13. Эта фигура является неограниченной, ее периметр бесконечен, значит, любое $a \leq 0$ является решением задачи.

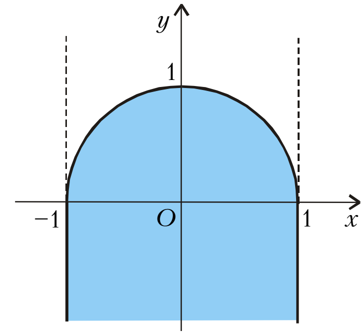

Рис. 13

Пусть $a > 0$. Заметим, что множество точек координатной плоскости, определяемое неравенством $|y| \leq \frac{1}{a}|x|$, симметрично относительно обеих координатных осей. Таким образом, искомая фигура – выделенное множество на рисунке 14.

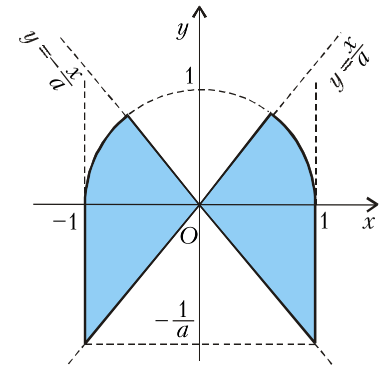

Рис. 14

Вычисляя периметр этой фигуры, получим

$$P(a) = 2 + \frac{2}{a} + 2\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{a}.$$

Остается решить неравенство

$$P(a) > P(1).$$

Для этого заметим, что функция $P(a)$ при $a > 0$ убывающая, т.е. решения неравенства образуют интервал $0 < a < 1$.

8. $\frac{31}{288}\sqrt{113}$. *Указание*. Сечением является пятиугольник, показанный на рисунке 15. В этом пятиугольнике

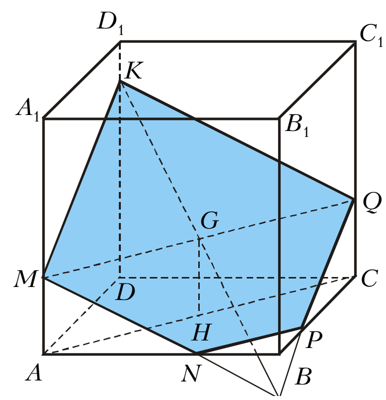

Рис. 15

$NP \parallel MQ \parallel AC$, $GH = MA = 1/3$, $MK \parallel QP$, $MN \parallel KQ$. Площадь пятиугольника равна сумме площадей равнобедренного треугольника MKQ и трапеции $MNPQ$.

Вариант 11

1. 3. **2.** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. $(-3; 9)$, $(2; 4)$. *Указание*. Из условия задачи следует, что корни x_1 и x_2 данного уравнения удовлетворяют системе $x_1^2 = px_2$, $x_2^2 = qx_1$, $x_1 + x_2 = 6p$, $x_1x_2 = q$.

4. а) 10π; б) 160. *Указание*. На числовой оси AB с началом в точке A окрашенные точки образуют 2 серии – это точки вида $x = 30\pi n$ и $x = 40\pi k$, $n,k \in \boldsymbol{N}$. Подсчитайте количество точек первой и второй серий, принадлежащих AB, и вычтите из суммы этих количеств число точек, принадлежащих пересечению двух упомянутых серий.

5. а) 3; б) $\frac{\pi}{3} \pm \arccos\frac{5}{6}$. *Указание*. Из подобия треугольников PQR и QTR следует, что $QT = \sqrt{PR \cdot TR}$ и что описанная около треугольника PQT окружность касается в точке Q прямой RQ. При вычислении угла QRP учтите, что RQ и RP могут находиться как по одну сторону от прямой OR, так и по разные стороны от нее.

6. $(0;0)$, $(\pm 2;\mp 2)$, $(\pm\sqrt{6};\pm\sqrt{6})$, $\left(\frac{(\pm\sqrt{3})+(\pm\sqrt{7})}{2};\frac{(\pm\sqrt{3})-(\pm\sqrt{7})}{2}\right)$ – всего 9 решений. *Указание*. Сложив и вычтя уравнения системы, получим систему

$$\begin{cases}(x+y)\left(x^2 - xy + y^2 - 6\right) = 0,\\ (x-y)\left(x^2 + xy + y^2 - 4\right) = 0,\end{cases}$$

равносильную совокупности из четырех систем

$$\begin{cases}x - y = 0,\\ x + y = 0;\end{cases} \quad \begin{cases}x + y = 0,\\ x^2 + xy + y^2 = 4;\end{cases} \quad \begin{cases}x^2 - xy + y^2 = 6,\\ x - y = 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2 - xy + y^2 = 6,\\ x^2 + xy + y^2 = 4.\end{cases}$$

Последняя из четырех равносильна системе

$$\begin{cases}x^2 + y^2 = 5,\\ 2xy = -2.\end{cases}$$

Вариант 12

1. $(0;1) \cup (\pi/2;2]$. **2.** $9\left(3+\sqrt{3}\right)$.

3. $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $n,k \in \boldsymbol{Z}$.

4. $(-1;\ 0)$.

5. а) $232 + 288\sqrt{2}$; б) $\frac{144\pi\left(5\sqrt{2}+7\right)}{7}$. *Указание*. Докажите, что радиусы шаров образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.

6. 2. *Указание*. Словарный запас людоеда составит через полгода $300(1 + p/100)$, а через год $300(1 + p/100)^2$ слов. Месячный прирост словарного запаса Эллочки $150(1 + p/100)$ слов. Из того что все эти числа должны быть целыми, следует, что $p = 10k$, где k – натуральное число. Мы должны найти такое n, при котором неравенство

$$300(1 + p/100)^2 > 30 + 150n(1 + p/100)$$

выполняется для всех $p = 10k$, $k \in \boldsymbol{N}$. После преобразований получим

$$n < \frac{k^2 + 20k + 90}{5k + 50} = \frac{k}{5} + 2 - \frac{2}{k+10} \le 2\frac{1}{55}$$

(функция, стоящая справа, – возрастающая). Итак, $n \le 2$.

Вариант 13

1. Утверждение справедливо. **2.** $\left[-\frac{1}{2};0\right] \cup \left[\frac{7}{3};\frac{5}{2}\right)$.

3. $(-2;\ 3)$, $(-3;\ 2)$, $(-1;\ 5)$ $(-5;\ 1)$. *Указание*. Выполните замену $u = x - y$, $v = xy$.

4. 20 рабочих, 6 часов.

5. $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi l$, $\frac{\pi}{18} + 2\pi m$, $\frac{17\pi}{18} + 2\pi n$, $k,l,m,n \in \boldsymbol{Z}$.

Указание. Приведите уравнение к виду

$$(\log_2 \sin 3x + 1)(\log_2 \cos 2x + 1) = 0.$$

6. $\sqrt{3/2}$. Пусть $f(x)$ и $g(y)$ – левая и правая части данного неравенства соответственно. Перепишем его в краткой форме:

$$f(x) \ge g(y). \qquad (1)$$

Пусть $u = x^2 - 6ax + 10a^2$, тогда левая часть неравенства принимает вид

$$\varphi(u) = \sqrt[4]{u} + \sqrt[4]{3-u}.$$

Так как при $u \in [0;3]$ справедливо равенство $\varphi(u) = \varphi(3-u)$, то наряду с решением $(u;y)$ неравенство

$$\varphi(u) \ge g(y) \qquad (2)$$

имеет решение $(3-u;y)$. Поэтому необходимым условием единственности решения (2) является требование $u = 3 - u$, или $u = 3/2$.

В свою очередь, уравнение

$$u = 3/2 \Leftrightarrow x^2 - 6ax + 10a^2 - \frac{3}{2} = 0,$$

определяющее зависимость x от данного u, имеет единственное решение при условии, что дискриминант квадратного трехчлена

$$D = -4a^2 + 6 = 0, \text{ т.е. } a = \pm\sqrt{3/2}.$$

Таким образом, получены необходимые условия единственности решения неравенства (1).

Для исследования достаточности покажем сначала, что

$$\varphi(u) \le \varphi(3/2) = \sqrt[4]{24} \text{ для } u \in [0;3]. \qquad (3)$$

Обозначим $p = \sqrt[4]{u} \ge 0$, $q = \sqrt[4]{3-u} \ge 0$. При этом $p^4 + q^4 = 3$.

Требуется найти максимальное значение суммы $p + q$.

С помощью неравенств $2p^2q^2 \le p^4 + q^4$, $2pq \le p^2 + q^2$ оценим

$$(p+q)^4 = p^4 + q^4 + 6p^2q^2 + 4pq\left(p^2+q^2\right) \le$$

$$\le 4\left(p^4+q^4\right) + 2\left(p^2+q^2\right)^2 \le 6\left(p^4+q^4\right) + 4p^2q^2 \le 8\left(p^4+q^4\right) = 24.$$

Тогда $p + q \le \sqrt[4]{24}$, причем равенство достигается при $p = q = \sqrt[4]{3/2}$. Отсюда следует искомое неравенство (3).

Рассмотрим теперь каждое из найденных значений a.

При $a = -\sqrt{3/2}$ правая часть исходного неравенства принимает вид

$$g(y) = \sqrt[4]{24 - \frac{6}{\sqrt{2}} + \left|y - \frac{3}{\sqrt{2}}\right| + \left|y + \frac{3}{\sqrt{2}}\right|} \ge \sqrt[4]{24},$$

поскольку, как нетрудно убедиться,

$$\left|y - \frac{3}{\sqrt{2}}\right| + \left|y + \frac{3}{\sqrt{2}}\right| \ge \frac{6}{\sqrt{2}},$$

причем

$$\left|y - \frac{3}{\sqrt{2}}\right| + \left|y + \frac{3}{\sqrt{2}}\right| = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

при $y \in \left[-\frac{3}{\sqrt{2}};\frac{3}{\sqrt{2}}\right]$.

Так как для всех $y \in \left[-\frac{3}{\sqrt{2}};\frac{3}{\sqrt{2}}\right]$ правая часть (2) принимает значение $g(y) = \sqrt[4]{24}$, то неравенство $\varphi(u) \ge g(y)$ (а с ним и неравенство (1)) имеет более одного решения.

При $a = \sqrt{3/2}$ выражение $g(y)$ записывается в виде

$$g(y) = \sqrt[4]{24 + 2\left|y - \frac{3}{\sqrt{2}}\right|} \ge \sqrt[4]{24},$$

причем $g(y) = \sqrt[4]{24}$ только для $y = \frac{3}{\sqrt{2}}$. В этом случае нера-

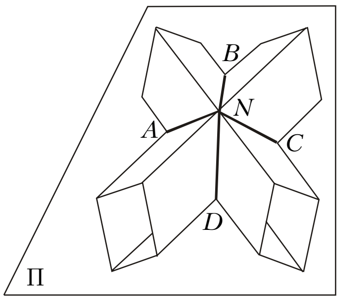

Рис. 16

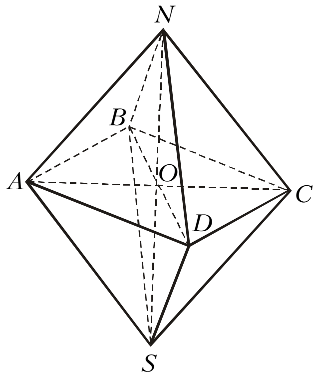

Рис. 17

венство (2) имеет единственное решение. В силу однозначности выражения x через u при указанном значении параметра a у неравенства (1) решение также единственно.

7. $\frac{2}{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$.

Для того чтобы понять, объем какого тела требуется вычислить в задаче, сначала представим себе фигуру, которая получается при пересечении двух равных призматических поверхностей (перпендикулярные сечения которых суть квадраты со стороной 1), положенных на плоскость Π в виде косого креста – так, как показано на рисунке 16. Эта фигура образована двумя равными четырехугольными пирамидами с общим основанием $ABCD$, все боковые грани которых наклонены к нему под углом 45°, отрезок NS перпендикулярен плоскости Π, а четырехугольник $ABCD$ – ромб, лежащий в плоскости, параллельной плоскости Π (рис.17). Острый угол этого ромба равен углу между ребром куба и его диагональю:

$$\angle ABC = 2\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}} .$$

Стороны ромба равны длине этой диагонали: $\sqrt{3}$.

Общей частью двух кубов является лишь часть тела, которое составлено из двух равных четырехугольных пирамид с общим основанием $BEFG$ (рис. 18, где изображено сечение об-

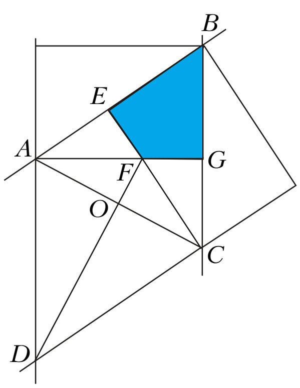

Рис. 18

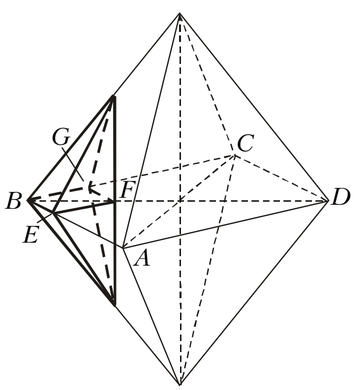

Рис. 19

щей конструкции плоскостью, параллельной плоскости Π, и рис.19, где изображено искомое тело). Это следует из того, что длина отрезка BF меньше длины отрезка BO:

$$BF = \frac{1}{\cos\alpha} < BO = \sqrt{3}\cos\alpha ,$$

так как

$$\cos^2\alpha = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{3}} .$$

Поскольку катеты прямоугольного треугольника BEF равны $BE = 1$ и $EF = 1\cdot \mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ соответственно, а высота интересующей нас пирамиды равна EF, то искомый объем равен

$$V = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\left(2-\sqrt{3}\right).$$

Вариант 14

1. $\left[-1;\left(5+\sqrt{13}\right)/2\right)$. **2.** $(11;+\infty)$.

3. 0. **4.** 1.

5. $2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. *Указание.* Уравнение приводится к виду

$$(\cos 5x-2)(2\cos x-3)=1 ,$$

откуда

$$2-\cos 5x = 1 ,\ 3-2\cos x = 1 .$$

6. 2. *Указание.* Пусть a и $-b$ – выражения, стоящие под знаком модуля. Уравнение переписывается так:

$$|a|+|-b|-a-b+c^2=0 , \text{ где } c = x-2 ,$$

или

$$\left(|a|-a\right)+\left(|b|-b\right)+c^2=0 ,$$

откуда

$$|a| = a ,\ |b| = b ,\ c = 0.$$

Вариант 15

1. 2. **2.** $(2;5/2)\cup(5/2;3)$. **3.** 60°.

4. 15 кг. **5.** $2R^2\cos\alpha\left(\sqrt{2}\sin\alpha+\sqrt{1+\sin^2\alpha}\right)$; 54.

6. -1; $-5/7$; -3. *Указание.* При $a=-1$ условие выполнено. При $a\ne -1$ произведение корней, т.е. $x_1x_2 = \frac{a+3}{a+1} = 1+\frac{2}{a+1}$ должно быть целым. Также должно быть целым число

$$x_1+x_2 = \frac{a-1}{a+1} = 1-\frac{2}{a+1} .$$

Откуда

$$x_1+x_2+x_1x_2 = 2 ,$$

или

$$(x_1+1)(x_2+1) = 3 .$$

Вариант 16

1. $(-\infty;1)\cup[2;+\infty)$. **2.** $\pi n/3$, $n\in\mathbf{Z}$. **3.** $(-\infty;-1]\cup\{2\}$.

4. $\left(-\frac{15}{16};\frac{1}{\sqrt[4]{2}}-1\right)\cup\left(\sqrt[4]{2}-1;15\right)$. *Указание.* Выполните замену $t=\log_2(x+1)$, а затем решите полученное неравенство относительно $|t|$.

5. $\sqrt{190}/2$.

6. $\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{6};\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}\right)$; первое число больше. *Указание.* Выполните замену переменной $u=\arcsin 2y$, $v=\arccos 3x$, воспользуйтесь равенством $\arccos a+\arcsin a=\pi/2$.

7. $\left[-6;1-\sqrt{13}\right]\cup\left[\sqrt{13}-1;6\right]$. Если $(x;y)$ – решение неравенства данной системы, то $(x;-y)$, $(-x;y)$, $(-x;-y)$ также его решения. Таким образом, множество M точек плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют неравенству, симметрично относительно обеих осей Ox и Oy.

Пусть $x\ge 0$, $y\ge 0$. Тогда исходное неравенство превращается в неравенство

$$x^2+y^2-6x-6y+17\le 0 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-3)^2\le 1 ,$$

которое задает круг единичного радиуса с центром в точке $(3;3)$.

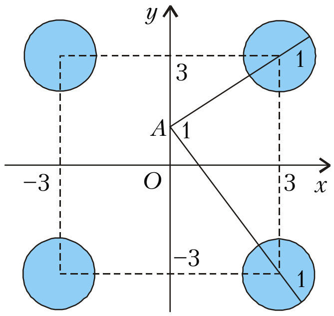

Рис. 20

Все множество M, состоящее из четырех кругов, изображено на рисунке 20. Равенство системы, которое можно переписать в виде

$$x^2+(y-1)^2=a^2,$$

является уравнением окружности с центром в точке $A=(0;1)$ и радиусом, равным $|a|$.

Расстояние r_1 от точки A до точек ближнего к ней круга (например, находящегося в первой четверти), принимает значения

$$\sqrt{3^2+2^2}-1=\sqrt{13}-1\le r_1\le\sqrt{3^2+2^2}+1=\sqrt{13}+1,$$

а расстояние r_2 от точки A до точек дальнего круга (например, с центром в $(3;-3)$) изменяется в пределах

$$\sqrt{3^2+4^2}-1=4\le r_2\le\sqrt{3^2+4^2}+1=6.$$

У системы решения существуют тогда и только тогда, когда окружность имеет непустое пересечение с множеством M. Таким образом, поскольку $\sqrt{13}-1<4<\sqrt{13}+1<6$, то необходимым и достаточным условием разрешимости системы является требование

$$\sqrt{13}-1\le|a|\le 6.$$

Вариант 17

1. 9 км/ч. **2.** 5/2.

3. $\left(-\infty;-\sqrt{17}\right)\cup[-4;-3)\cup(-3;3)\cup\left(\sqrt{17};5\right]$.

4. 9. **5.** 5 ч и 7 ч 30 мин.

6. −4; 4; 6. *Указание*. Если $(x_0;\,y_0)$ – решение системы, то $(x_0;\,-y_0)$ – тоже решение. Необходимым условием для нечетности числа решений является существование решения, для которого $y_0=-y_0$, т.е. $y_0=0$. Осталось подставить $y=0$ в систему и выяснить, при каких a количество решений равно трем. Возможные значения a находим из системы

$$\begin{cases}(3x-3)(x-9)=0,\\(x-a)^2=25.\end{cases}$$

Это: −4, 4, 6, 14.

Теперь перепишем исходную систему:

$$\begin{cases}(3x+|y|-3)(x+3|y|-9)=0,\\(x-a)^2+y^2=25,\\x\ge 0.\end{cases}$$

Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют первому уравнению, – это четырехугольник $ABCD$, показанный на рисунке 21. Второе уравнение – окружности с центром в точке $(a;\,0)$ и радиусом 5.

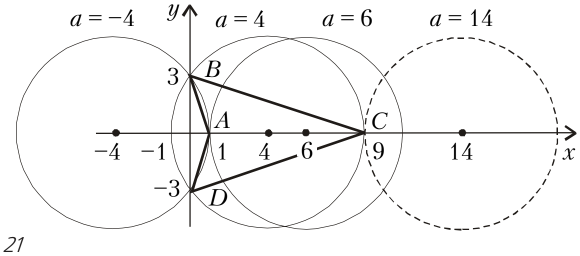

Рис. 21

7. (8, 0, 1, 0, 1). Описание процедуры дележа начнем со случая, когда число участвующих в нем равно двум. В этом случае старший пират забирает все золото – половина (он сам) поддерживает его предложение. Таким образом, итог дележа (10, 0).

В случае, если число пиратов равно трем, старший пират предлагает дележ, дающий 9 слитков ему и 1 слиток младшему (младший, понимая, что если он поддержит среднего пирата, то в итоге не получит ничего, вынужден с этим предложением согласиться). Тем самым, итог дележа (9, 0, 1). В случае, если число пиратов равно четырем, старший пират рассуждает так: «Если мое предложение будет отвергнуто, то три оставшихся пирата разделят золотые слитки по правилу (9, 0, 1); следовательно, я должен предложить такой дележ, который был бы выгоднее хотя бы одному из них, а мне давал бы наибольшую возможную долю». Единственное решение этой задачи – дележ (9, 0, 1, 0), в котором старший пират жертвует лишь одним слитком (в пользу пирата, третьего по старшинству).

Рассуждая подобным образом в случае пяти пиратов, в итоге получаем ответ: (8, 0, 1, 0, 1).

ФИЗИКА

Физический факультет

1. По условию задачи при движении точки A нити катушка катится без проскальзывания, сохраняя ориентацию своей оси. Следовательно, считая, как это обычно и делается в подобных задачах, катушку твердым телом, ее движение можно представить как сумму поступательного движения со скоростью u и вращения с некоторой угловой скоростью ω вокруг оси катушки. Катушка катится без проскальзывания, поэтому геометрическое место точек касания катушкой плоскости (считаем, конечно, плоскость абсолютно твердой) является мгновенной осью вращения, а величина угловой скорости вращения катушки равна

$$\omega=u/R.$$

Участок нити между точкой B ее касания средней части катушки и точкой A (рис.22) можно считать прямолинейным и утверждать, что сила натяжения нити в момент начала движения катушки должна образовывать с горизонтом тот же угол, что и касательная к нити в точке A. Поскольку иное специально не оговорено в условии задачи, будем считать указанный отрезок нити целиком расположенным в вертикальной плоскости, перпендикулярной оси катушки. Тогда, как это видно из рисунка, момент силы натяжения нити должен заставить катушку вращаться по часовой стрелке. Следовательно, учитывая нерастяжимость нити, можно утверждать, что

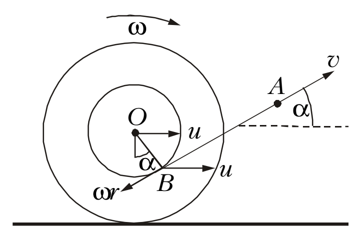

Рис. 22

$$v=u\cos\alpha-\omega r.$$

Отсюда находим искомую скорость движения оси катушки:

$$u=\frac{v}{\cos\alpha-1/n}=\frac{2v}{\sqrt{3}-1}.$$

2. Будем решать задачу при следующих стандартных предположениях: действием воздуха на тела системы можно пренебречь, а лабораторную систему отсчета, относительно которой оси колес неподвижны, можно считать инерциальной. Поскольку нить является шероховатой, при движении груза она не скользит по ободам колес. Из условия задачи следует, что в течение интересующего нас промежутка времени груз после отпускания движется поступательно вертикально вниз. Поэтому, учитывая, что ободы тонкие, нить нерастяжимая и тонкая, можно утверждать, что величины линейных скоростей точек ободов колес, груза и точек нити в указанные моменты времени должны быть одинаковыми.

Для решения задачи используем закон сохранения механической энергии. Действительно, в рамках сделанных предположений механическую систему, состоящую из груза, нити, колес и Земли, следует считать изолированной консервативной системой. Пусть в некоторый момент времени t после начала движения скорость груза стала равна v. В соответствии с условием задачи и сказанным ранее, кинетическую энергию колеса, определяемую как сумма кинетических энергий всех его точек, можно считать равной кинетической энергии его обода, т.е. $0{,}5Mv^2$. По прошествии достаточно малого промежутка времени Δt ($\Delta t \to 0$) величина скорости груза увеличится на некоторую малую величину Δv, а приращение кинетической энергии рассматриваемой системы тел будет равно

$$\Delta W_k = 0{,}5(m+2M)\left((v+\Delta v)^2 - v^2\right) = (m+2M)v\Delta v .$$

(Утверждая это, мы считали, что кинетическая энергия Земли при опускании груза остается неизменной. Последнее утверждение может показаться неверным. В самом деле, поскольку импульс вращающегося вокруг неподвижной оси однородного тонкого обода равен нулю, как и импульс нити, то на основании закона сохранения импульса (рассматриваемая система при сделанных предположениях, конечно, является замкнутой) нужно считать, что приращения импульсов груза и Земли по отношению к инерциальной системе отсчета должны быть равны по величине. Однако, учитывая, что масса Земли во много раз больше массы груза, изменением скорости Земли по отношению к инерциальной системе отсчета, обусловленным движением груза, надо пренебречь. Поэтому следует пренебречь не только изменением кинетической энергии Земли, но и ее ускорением, обусловленным движением груза, а потому лабораторную систему отсчета действительно можно считать инерциальной.)

Поскольку выбранный промежуток времени Δt достаточно мал, величину ускорения a груза в течение этого промежутка с большой точностью можно считать постоянной. Следовательно, за этот промежуток времени скорость груза должна увеличиться на $\Delta v = a\Delta t$, а груз должен опуститься на $\Delta h = v\Delta t + 0{,}5a(\Delta t)^2$. Учитывая, что $v \gg 0{,}5a\Delta t$, последним слагаемым в предыдущей формуле следует пренебречь. Поэтому за рассматриваемый малый промежуток времени убыль потенциальной энергии системы будет равна

$$\Delta W_p = mg\Delta h = mgv\Delta t .$$

Из равенства $\Delta W_k = \Delta W_p$ получаем, что ускорение груза в течение рассматриваемого малого промежутка времени равно

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{m}{m+2M}g .$$

3. При решении задачи будем считать, что паровоз движется равномерно по прямолинейному горизонтальному участку пути и что состояние содержимого цилиндра все время близко к равновесному. Пренебрегая силами трения поршня и его штока о цилиндр, как это обычно и делается, если в условии задачи специально не оговорено иное, можно утверждать, что величина равнодействующей сил, действующих на поршень и шток со стороны цилиндра и его содержимого, равна (рис.23)

$$F_1 = (p - p_а)S .$$

В условии задачи не указана масса штока с поршнем и шатуна. Очевидно, что решение задачи будет более простым, если пренебречь массами этих тел и считать, что на шатун не действуют силы трения. Тогда, на основании второго и третьего законов Ньютона, можно утверждать, что горизонтальная составляющая F_2 силы, действующей на ось A, равна F_1.

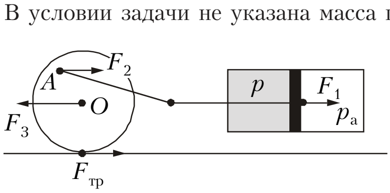

Рис. 23

На рисунке показана также сила F_3, действующая на колесо со стороны его оси O, и сила трения $F_{тр}$ со стороны дороги. Поскольку колесо вращается равномерно (по предположению, паровоз движется равномерно), сумма вращающих моментов, действующих на колесо, равна нулю. Так как вращающий момент силы F_2 максимальным будет тогда, когда оси A и O будут находиться на одной вертикали, максимальная величина силы трения колеса о рельс – силы тяги одного колеса – должна при наших предположениях удовлетворять условию

$$rF_2 = RF_{тр} .$$

Конечно, сказанное верно в предположении, что нет проскальзывания колеса по рельсу, т.е. коэффициент трения колеса о рельс достаточно велик.

Согласно второму закону Ньютона, при равномерном прямолинейном движении колеса сумма действующих на него сил равна нулю. Следовательно, величина искомой силы, действующей на ось O со стороны колеса, равна

$$F = F_3 = F_2 + F_{тр} = (p - p_а)(1 + r/R)S .$$

4. По условию задачи малые свободные колебания легкого диска, когда тяжелый диск лежит на столе, являются гармоническими. Поэтому период малых вертикальных колебаний легкого диска равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} ,$$

где m – масса легкого диска, а k – жесткость пружины. Поскольку при всех допустимых амплитудах колебаний пружина должна подчиняться закону Гука, нарушение гармоничности колебаний может быть обусловлено только изменением характера внешних сил, действующих на диски. Очевидно, что при всех возможных амплитудах колебаний величину ускорения свободного падения ($g = 9{,}8$ м/с^2) следует считать постоянной. Поэтому нарушение гармоничности колебаний возможно только из-за изменения характера силы реакции стола на лежащий на нем диск, т.е. из-за отрыва нижнего легкого диска от поверхности стола под действием сил упругой деформации растянутой пружины. Ясно, что отрыв нижнего диска от стола произойдет в тот момент, когда величина силы упругой деформации растягивающейся пружины превысит величину силы тяжести mg, действующей на легкий диск. Поскольку в положении равновесия тяжелый диск сжимает пружину на nmg/k, нарушение гармоничности вертикальных колебаний тяжелого диска при соблюдении сделанных выше предположений должно возникнуть, если амплитуда его колебаний превысит величину

$$x_m = \frac{n+1}{k}mg = \frac{n+1}{4\pi^2}gT^2 \approx 3 \text{ см} .$$

5. Учитывая, что давление p_1 газов в баллоне не очень сильно отличается от атмосферного и их температура близка к комнатной, будем считать, что к смеси газов применимо уравнение Клапейрона–Менделеева, а потому количество молей водорода ν_{H_2} и молей кислорода ν_{O_2} можно найти из уравнения

$$p_1V = \left(\nu_{H_2} + \nu_{O_2}\right)RT_1 ,$$

где R – универсальная газовая постоянная. С другой стороны, согласно определению молярной массы,

$$m = M_{H_2}\nu_{H_2} + M_{O_2}\nu_{O_2} ,$$

где $M_{H_2} = 2$ г/моль и $M_{O_2} = 32$ г/моль – молярные массы водорода и кислорода соответственно. Решая совместно приведенные уравнения, получим, что в исходном состоянии в баллоне находилось

$$\nu_{H_2} = \frac{M_{O_2} V p_1 - mRT_1}{\left(M_{O_2} - M_{H_2}\right) RT_1} \approx 6{,}3 \text{ моль}$$

и

$$\nu_{O_2} = \frac{mRT_1 - M_{H_2} V p_1}{\left(M_{O_2} - M_{H_2}\right) RT_1} \approx 1{,}5 \text{ моль}$$

водорода и кислорода соответственно. Отсюда следует, что после химической реакции

$$2H_2 + O_2 = 2H_2O$$

в баллоне будет находиться $\nu_1 = \nu_{H_2} - 2\nu_{O_2}$ молей водорода и $2\nu_{O_2}$ молей воды.

При остывании содержимого баллона до температуры $t_2 = 100$ °C и установлении термодинамического равновесия часть воды могла сконденсироваться. Если считать, что пары воды вплоть до точки насыщения ведут себя подобно идеальному газу, и вспомнить, что при нормальном атмосферном давлении вода кипит при 100 °C (а потому при указанной температуре давление насыщенных паров воды $p_н\left(100\ ^\circ C\right) = p_a = 1$ атм), то согласно уравнению Клапейрона–Менделеева в состоянии термодинамического равновесия в баллоне в конечном состоянии должно содержаться не менее

$$m_в = \left(2\nu_{O_2} - \frac{p_a V}{RT_2}\right) M_в \approx 18 \text{ г}$$

воды в конденсированном состоянии. Делая этот расчет, мы пренебрегли объемом сконденсировавшейся воды. Действительно, плотность воды при давлении порядка нескольких атмосфер и температуре 100 °C можно считать примерно равной 1 г/см^3 , следовательно, объем сконденсировавшейся воды должен быть близок к 18 см^3, что значительно меньше объема баллона $V = 60$ дм^3 . Исходя из сказанного, можно считать, что и оставшийся в баллоне после реакции водород находится в объеме V.

Таким образом, после установления конечной температуры в состоянии термодинамического равновесия в баллоне находятся водород, насыщенный пар воды и занимающая малую часть баллона вода в сконденсированном состоянии. Поскольку давление газообразной смеси равно сумме парциальных давлений ее составляющих, можно утверждать, что искомое давление должно быть близко к

$$p_x = p_a + \frac{\nu_1 RT_2}{V} \approx 2{,}8 \text{ атм} .$$

6. На рисунке 24 изображены два возможных цикла теплового двигателя, состоящие из изобары, изохоры и адиабаты (стрелками указаны направления изменения параметров газа). Если на этих рисунках изобразить изотермы, соответствующие разным температурам неизменного количества молей идеального газа, то легко доказать, что условиям задачи удовлетворяет лишь цикл, изображенный на рисунке 24,*а*, и наиболее низкую температуру газ должен иметь в точке *3* – точке пересечения изобары и изохоры. На участке *3–1*

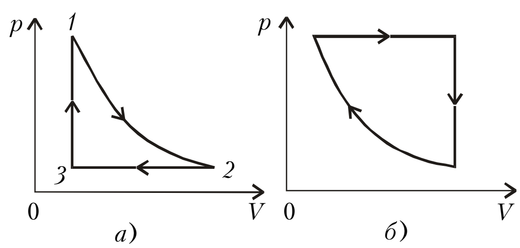

Рис. 24

(участок изохорического нагревания) газ не совершает работы, а количество теплоты, полученное газом на этом участке, равно

$$Q_{31} = 1{,}5R\left(T_1 - T_3\right) .$$

На участке *2–3* от газа тепло должно отводиться, так как внутренняя энергия газа уменьшается и над газом совершают работу. Молярная теплоемкость идеального одноатомного газа при изобарическом процессе *2–3* равна 2,5 R, следовательно, на участке *2–3* от газа должно быть отведено количество теплоты

$$Q_{23} = 2{,}5R\left(T_2 - T_3\right) .$$

На участке *1–3* (участок адиабатического расширения), по определению адиабатического процесса, теплообмена газа с окружающими телами нет, газ совершает работу, а его внутренняя энергия уменьшается.

По определению коэффициент полезного действия цикла равен $\eta = A/Q_н$, где A – совершенная газом за цикл работа, а $Q_н$ – полученное от нагревателя за цикл количество теплоты. В соответствии с первым законом термодинамики, если газ отдает холодильнику количество теплоты $Q_х$, то

$$A = Q_н - Q_х = Q_{31} - Q_{23} .$$

Решая совместно составленные уравнения, получим, что температура газа в конце адиабатического расширения (точка *2* на рисунке 24,*а*) равна

$$T_2 = 0{,}6\left(1 - \eta\right) T_1 + \left(0{,}4 + 0{,}6\eta\right) T_3 .$$

Наконец, воспользовавшись полученным значением T_2 и уравнением Клапейрона–Менделеева, определим работу над газом при его сжатии, т.е. работу, совершаемую над газом на участке *2–3*:

$$A_{23} = p_2\left(V_2 - V_3\right) = R\left(T_2 - T_3\right) = 0{,}6R\left(1 - \eta\right)\left(T_1 - T_3\right) .$$

7. При возникновении электрических контактов между обкладками конденсатора и проводящими пластинами через них начинает протекать ток, а на границах проводников накапливаются избыточные электрические заряды. Под действием электрического поля, создаваемого этими зарядами, по прошествии достаточно большого промежутка времени через любое поперечное сечение цепи должен протекать один и тот же ток, величина которого, в соответствии с законом Ома для участка цепи, равна $I = U/\left(R_1 + R_2\right)$, где R_1 и R_2 – сопротивления первой и второй пластин. При этом, конечно, предполагается, что обкладки конденсатора сделаны из идеальных проводников и сопротивление контактов между соприкасающимися телами равно нулю. Поэтому поверхности пластин, касающиеся обкладок, можно считать эквипотенциальными. Тогда сопротивление однородного призматического проводника, как и тонкого проводника, можно вычислить по формуле $R = \rho l/S$, где ρ – удельное сопротивление материала проводника, l – длина проводника, а S – площадь его поперечного сечения. Следовательно, сила постоянного тока и модуль разности потенциалов U_1 между плоскостями первой пластины, касающимися обкладки конденсатора и второй пластины, связаны соотношением

$$I = \frac{2U_1 S}{\rho_1 d} = \frac{2\left(U - U_1\right) S}{\rho_2 d} .$$

Учитывая, что пластины однородные и имеют одинаковые сечения, а обкладки конденсатора являются эквипотенциальными плоскостями (по предположению, они идеальные проводники), можно утверждать, что в установившемся режиме электрическое поле в пределах каждой из пластин является однородным и порождается зарядами, находящимися на обкладках и на границе между пластинами. Утверждая это, мы учли, что по условию задачи конденсатор плоский, а потому можно пренебречь краевыми эффектами и считать, что заряды равномерно распределены по указанным плоскостям, а полем зарядов на торцах пластин можно пренебречь. Если считать, что удельное сопротивление первой пластины меньше, чем второй, и ток течет от первой пластины ко второй, на плоскости соприкосновения пластин должен находиться избыточный положительный заряд. Пусть поверхностная плотность этого заряда σ. Зная, что вектор напряженности поля плоскости, равномерно заряженной положительным зарядом, направлен по нормали от нее, а его модуль равен $E = \sigma/(2\varepsilon_0)$, где ε_0 – электрическая постоянная, на основании принципа суперпозиции полей можно записать

$$\frac{2U_1}{d} = \frac{U}{d} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Из полученных соотношений находим искомую плотность зарядов на границе соприкосновения пластин:

$$\sigma = \frac{2(\rho_2 - \rho_1)\varepsilon_0 U}{(\rho_1 + \rho_2)d}.$$

8. При решении задачи будем считать, что ось, вокруг которой может поворачиваться треугольник, и опора, на которую он опирается, покоятся относительно лабораторной системы отсчета и эта система является инерциальной. Тогда можно утверждать, что сумма моментов всех сил, действующих на покоящийся треугольник, относительно заданной оси должна быть равна нулю. По условию задачи треугольник может свободно вращаться вокруг оси, следовательно, на него не действуют силы трения. Поэтому треугольник перестанет давить на опору тогда, когда момент сил тяжести будет уравновешен моментом сил Ампера, действующих на стороны треугольника.

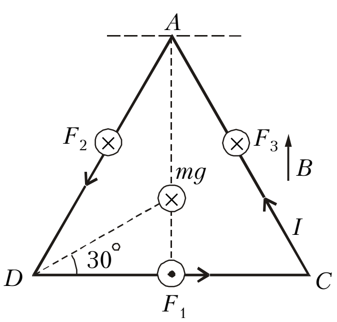

Рис. 25

Будем считать, что проволока, из которой изготовлен треугольник, является однородной. Тогда равнодействующую сил тяжести mg следует считать приложенной к центру треугольника, как показано на рисунке 25. Поскольку треугольник является равносторонним, а проволока тонкой, точка приложения указанной равнодействующей должна находиться от оси вращения A на расстоянии $h = a/(2\cos 30^\circ) = a/\sqrt{3}$. Таким образом, момент сил тяжести относительно заданной оси равен

$$M_т = \frac{amg}{\sqrt{3}}.$$

Пусть по проволоке, из которой изготовлен треугольник, протекает постоянный ток в том из двух возможных направлений, которое указано на рисунке 25 стрелками на сторонах треугольника. Как известно, действующая на элемент тока сила Ампера равна $\Delta\vec{F} = \left[I\Delta\vec{L}\cdot\vec{B}_\Sigma\right]$, где $\Delta\vec{L}$ – вектор, направление которого совпадает с направлением тока, а модуль равен длине столь малого отрезка проводника, что в месте его нахождения индукцию магнитного поля в отсутствие данного элемента можно считать постоянной и равной $\vec{B}_\Sigma$. В рассматриваемом случае индукция магнитного поля $\vec{B}_\Sigma$ равна сумме индукции внешнего однородного поля $\vec{B}$ и индукции поля $\vec{B}_c$, порождаемого током в сторонах треугольника за исключением того участка проволоки, действие силы Ампера на который вычисляется. Поскольку линии индукции поля $\vec{B}_c$ пересекают плоскость треугольника по нормали к ней, из закона Ампера следует, что на малый элемент стороны треугольника за счет поля $\vec{B}_c$ будет действовать сила, линия действия которой лежит в плоскости треугольника и направлена по нормали к рассматриваемому элементу. Следовательно, момент этих сил относительно заданной оси вращения равен нулю, но они обусловливают возникновение механических напряжений в проводниках контура.

Составляющие силы Ампера, обусловленные наличием внешнего магнитного поля $\vec{B}$, линии индукции которого по условию задачи коллинеарны плоскости треугольника и перпендикулярны оси вращения, направлены вертикально, а потому будут создавать вращающий момент относительно заданной оси. Сторона DC треугольника находится от оси вращения на расстоянии $h_1 = a\sin 60^\circ$, а величина действующей на нее силы равна $F_1 = IaB$. Поэтому величина обусловленного внешним полем вращающего момента, действующего на сторону DC, равна

$$M_1 = h_1F_1 = a^2IB\sin 60^\circ = 0{,}5\sqrt{3}\,a^2IB.$$

Несколько сложнее обстоит дело с вычислением вращающего момента, действующего на стороны AD и AC. На маленький кусочек проволоки стороны AD длиной ΔL, находящийся от оси вращения в среднем на расстоянии x_i ($0 \le x_i \le$ $\le a\cos 60^\circ$), со стороны внешнего магнитного поля действует вращающий момент, величина которого равна

$$\Delta M_i = x_iIB\Delta L\sin 30^\circ = IB\,\mathrm{tg}\,30^\circ\cdot x_i\Delta x.$$

Здесь было учтено, что, в соответствии с условием задачи, угол между вектором $\vec{B}$ и стороной AD равен либо 30°, либо 150°, но $\sin 30^\circ = \sin 150^\circ$, и что $\Delta L = \Delta x/\cos 30^\circ$. Для нахождения величины вращающего момента M_2, действующего на всю сторону AD, следует найти сумму всех моментов, действующих на участки этой стороны. Сделать это можно, например, обратившись к рисунку 26, на котором показан график функции $y = x$. Действительно, величину $x_i\Delta x$ с точки зрения геометрии можно трактовать как площадь прямоугольника высотой x_i и длиной основания Δx. Тогда величина момента M_2 должна быть пропорциональна площади прямоугольного треугольника, длина катетов которого равна $a\cos 60^\circ$:

$$M_2 = 0{,}5\left(a\cos 60^\circ\right)^2 IB\,\mathrm{tg}\,30^\circ = \sqrt{3}\,a^2IB/8.$$

Рассуждая аналогично, можно доказать, что на сторону треугольника AC должен действовать такой же вращающий момент, как и на сторону AD.

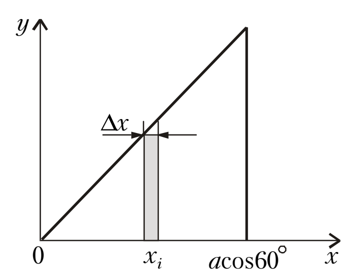

Рис. 26

Вспоминая правило нахождения направления вектора, равного векторному произведению двух других векторов (или правило нахождения направления силы Ампера), можно доказать, что моменты, действующие на стороны AD и AC, стремятся вызвать поворот треугольника в сторону, противоположную вращению, которое могло бы возникнуть под действием момента M_1. Поскольку $2M_2 < M_1$, то треугольник перестанет давить на опору при выбранном направлении тока в его сторонах, если вектор индукции $\vec{B}$ будет направлен так, как показано на рисунке 25, а его величина будет такой, чтобы выполнялось соотношение

$$M_1 = 2M_2 + M_т. \qquad (5)$$

Решая полученную систему уравнений, найдем, что искомое значение индукции внешнего поля равно

$$B = \frac{4mg}{3al}.$$

9. Поскольку в условии задачи специально не оговорено положение оптической оси объектива, будем решать задачу, полагая, что эта ось проходит через центр Солнца. Тогда можно утверждать, что изображение Солнца (весьма удаленного от объектива светящегося шара), даваемое первой собирающей линзой, должно располагаться в ее фокальной плоскости и иметь вид круга, центр которого лежит на оптической оси, а радиус равен $r = F_1 \operatorname{tg}\alpha$, где α – половина угла, под которым виден диаметр Солнца из места расположения линзы (рис.27).

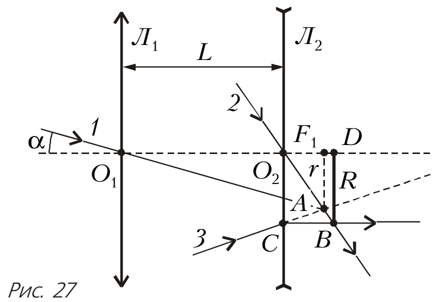

Рис. 27

По условию задачи рассеивающая линза расположена за собирающей на расстоянии L, меньшем фокусного расстояния последней. Поэтому для нахождения изображения Солнца, получаемого с помощью заданного объектива, круг радиусом r следует рассматривать как мнимый предмет, изображение которого рассеивающей линзой и является искомым. Воспользовавшись формулой линзы, можно найти положение изображения, формируемого рассеивающей линзой, а затем, используя формулу для поперечного увеличения, определить радиус R изображения Солнца, получаемого с помощью данного объектива. Однако решить задачу можно и не прибегая к указанным формулам, а построив изображение круга радиусом r, полагая, как и при использовании ранее указанных соотношений, что, изображение Солнца является стигматичным.

На рисунке 27 показан один из возможных вариантов такого построения. Здесь цифрой *1* обозначен один из лучей, идущих от крайних точек Солнца и проходящих через оптический центр O_1 собирающей линзы $Л_1$. Ход этого луча за точкой его пересечения с главной плоскостью рассеивающей линзы $Л_2$ вплоть до точки A его пересечения с фокальной плоскостью собирающей линзы показан пунктирной линией. По предположению, изображение Солнца является стигматичным, т.е. все лучи, исходящие из некоторой его точки, должны пересекаться в одной и той же одной точке – точке, являющейся изображением рассматриваемой точки Солнца. Поэтому для нахождения изображения точки A можно воспользоваться, например, лучом *2*, совпадающим с побочной оптической осью рассеивающей линзы, проходящей через точку A, и лучом *3*, продолжение которого (на рисунке 27 оно изображено пунктирной линией) проходит через точку A и главный фокус F_2 рассеивающей линзы. После пересечения главной плоскости линзы $Л_2$ в точке C луч *3* выходит из нее параллельно оптической оси объектива и пересекает луч *2* в точке B, являющейся изображением точки A. Из подобия прямоугольных треугольников F_1F_2A и O_2F_2C следует, что $r/R = \left(|F_2| - F_1 + L\right)/|F_2|$.

Поскольку изображения Солнца, создаваемые неизвестной тонкой линзой и данным объективом, должны быть одинаковыми, то главная оптическая ось этой линзы должна проходить через центр Солнца, а ее фокусное расстояние должно быть равно

$$F = \frac{R}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{F_1|F_2|}{|F_2| - F_1 + L} = 25 \text{ см}.$$

10. Падающий на пластинку параллельный пучок фотонов, имеющих одинаковую энергию, с точки зрения электромагнитной теории света следует рассматривать как плоскую монохроматическую волну, частота колебаний в которой равна $\nu = W/h$, где $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка. Часть этой волны, падающая на горизонтальную плоскость пластинки, внутри нее распространяется в прежнем направлении, так как скорость фотонов направлена вертикально вниз. Часть же волны, падающая на образующую с горизонтом угол α плоскую поверхность пластинки, испытывает преломление (рис.28). Считая, как обычно, стекло однородным прозрачным изотропным материалом, на основании известного закона геометрической оптики можно доказать, что нормаль к волновому фронту этой части волны внутри пластинки должна образовывать с вертикалью угол β, удовлетворяющий соотношению $\sin\alpha = n\sin(\alpha - \beta)$, или $\beta = (1 - 1/n)\alpha$, так как $\alpha \ll 1$ рад.

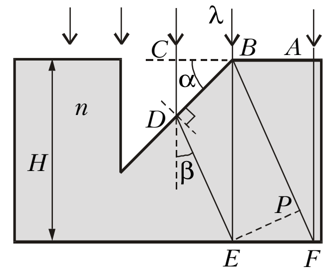

Рис. 28

По условию задачи на матовой нижней плоскости пластинки наблюдается интерференционная картина. Поскольку в задаче требуется определить наибольший порядок максимума в этой картине, будем считать, что интерференционная картина может наблюдаться во всей области, где имеет место наложение световых пучков. Из рисунка 28 ясно, что интерференция может иметь место лишь на отрезке EF. Считая, что пластинка находится в воздухе, показатель преломления которого, как обычно, будем считать равным единице, можно доказать, что при заданных параметрах пластинки и энергии падающих фотонов наибольшая разность хода будет иметь место в точке F. Следовательно, максимальный порядок наблюдаемого интерференционного максимума должен быть равен целой части отношения разности длин отрезков BF и AF к длине волны λ распространяющегося в пластинке излучения. Поскольку скорость света в вакууме равна $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, а фазовая скорость света в пластинке в n раз меньше, то искомый порядок интерференции должен быть равен целой части отношения

$$\frac{BF - AF}{\lambda} n = \frac{nH}{\lambda}\left(\frac{1}{\cos\beta} - 1\right), \text{ где } \lambda = \frac{hc}{W}.$$

Учитывая, что, в силу малости угла, $\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} \approx$ $\approx 1 - \beta^2/2$, получим

$$k_{\max} \approx E\left\{\frac{nH\beta^2}{2\lambda}\right\} = E\left\{\frac{(n-1)^2\alpha^2 HW}{2nhc}\right\} = 6,$$

где символ $E\{\ldots\}$ означает, что от стоящего в фигурных скобках выражения должна быть взята целая часть.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $\tau = \dfrac{2L}{v_0}\dfrac{M^2}{m^2}$.

2. $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta + \sqrt{1 + \left(m\sin^2\beta\right)/M}} = \operatorname{arctg} 0{,}4 \approx 22^\circ$.

3. $H = h\left(1 + \dfrac{M_1 + m}{M_2}\right) = 25$ см.

4. $a_1 = \sqrt{a_2(4g - a_2)}/2 \approx 9{,}7$ м/с^2.

5. $p = \dfrac{\rho g h V_1 - p_0\left(V_0 - V_1\right)}{V_1 - V_0\varphi/100\%} = 5$ кПа .

6. $Q = cm|t| + \lambda m\left(1 - m^2\Big/\left(\rho_л^2 S^3\right)\right) \approx 3{,}5$ кДж .

7. $q_1 = 2l\sqrt{\pi\varepsilon_0}\left(\sqrt{F_2} \pm \sqrt{F_2 - F_1}\right)$, $q_2 = 2l\sqrt{\pi\varepsilon_0}\left(\sqrt{F_2} \mp \sqrt{F_2 - F_1}\right)$.

8. $\alpha = 1/2$.

9. $n > 2$.

10. $D = \dfrac{b\left(d - F\right)^2}{dF\left(dF + Fb - db\right)} \approx 5$ дптр .

Химический факультет

1. $a = \dfrac{2\left(l_2/t_2 - l_1/t_1\right)}{t_1 + t_2}$.   2. $t = \dfrac{\sqrt{v_1 v_2}}{g} = 0{,}6$ с .

3. $l = 2v_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 8$ м .   4. $\rho = \rho_0/2$.

5. $A = RT_1\dfrac{(n+1)(k-1)}{2n} = 1660$ Дж ,

$\Delta U = \dfrac{3}{2}RT_1\dfrac{k-n}{n} = -1245$ Дж .

6. $m = \dfrac{Mp_0\left(V_0 - M/\rho_0\right)}{RT} = 0{,}58$ г .   7. $k = 16/9$.

8. $\omega_{\max} = \dfrac{qrB + \sqrt{q^2r^2B^2 + 4m^2\mu gr}}{2mr}$.

9. $u = v\Big/\sqrt{n^2 - 1} \approx 1{,}13$ м/с .

10. $F = \dfrac{l_2h_2 - l_1h_1}{h_2 - h_1} = \dfrac{3}{7}$ м $\approx 0{,}43$ м .

Уравнения Пелля

(см. «Квант» №4 за 2002 г.)

47. Поскольку квадрат натурального числа может оканчиваться лишь на одну из цифр 0, 1, 4, 5, 6, 9, нужно решить в натуральных числах уравнения $x^2 - 10y^2 = 0$, 1, 4, 5, 6 или 9. Два из них – а именно, уравнение $x^2 - 10y^2 = 0$ и уравнение $x^2 - 10y^2 = 5$ – решений в натуральных числах не имеют. А остальные имеют: $x + y\sqrt{10} = a\left(19 + 6\sqrt{10}\right)^n$, где n – целое неотрицательное число, $a = 1, 2, 4 + \sqrt{10}$, $16 + 5\sqrt{10}$, $3, 7 + 2\sqrt{10}$ или $13 + 4\sqrt{10}$.

48. а) $x + y\sqrt{17} = \pm a\left(4 + \sqrt{17}\right)^{2n}$, где $a \in \left\{-1 + \sqrt{17}; 1 + \sqrt{17}; 16 + 4\sqrt{17}\right\}$, а n – целое число.

49. Пусть $a^2 - dy^2 = 1$, где a, b – натуральные числа. Рассмотрите такое натуральное число m, что $\left(x + y\sqrt{d}\right)^{m-1} <$ $< a + b\sqrt{d} \le \left(x + y\sqrt{d}\right)^m$, и такие рациональные числа z и t, что $z + t\sqrt{d} = \left(a + b\sqrt{d}\right)\Big/\left(x + y\sqrt{d}\right)^{m-1} = \left(a + b\sqrt{d}\right)\left(y\sqrt{d} - x\right)^{m-1}$.

50. В силу упражнения 49, находим $q = \left(a + \sqrt{a^2 + 1}\right)^2 =$ $= 2a^2 + 1 + 2a\sqrt{a^2 + 1}$. Поскольку числа $-1 + \sqrt{a^2 + 1}$, $1 + \sqrt{a^2 + 1}$ и $a^2 + a\sqrt{a^2 + 1}$ больше 1 и не превосходят $2a^2 + 1 + 2a\sqrt{a^2 + 1}$, то множеству M принадлежат пары $(-1; 1)$, $(1; 1)$ и $\left(a^2; a\right)$.

51. В формулировке этой задачи допущены ошибки. Вместо слова «наибольшее» должно быть «наименьшее», а в п. б) один из «$\pm$» следует заменить на «$\mp$».

а) Если a четно, то b нечетно, $b^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ и $1 = a^2 - pb^2 \equiv$ $\equiv 0 - 1\cdot 1(\mathrm{mod}\,4)$.

б) Рассмотрите равенство $(a-1)(a+1) = pb^2$ и воспользуйтесь основной теоремой арифметики и тем, что НОД(a – 1, a + 1) = 2.

в) $u^2 - pv^2 = \dfrac{a \pm 1}{2} - \dfrac{a \mp 1}{2} = \pm 1$. Равенство $u^2 - pv^2 = 1$ невозможно, поскольку a – *наименьшее* из возможных.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
В.Д.Акатьева, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.И.Пацхверия, Е.А.Силина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ
Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №