Абель и его великая теорема

В. ТИХОМИРОВ

Великий норвежский математик Нильс Хенрик Абель (1802 – 1829), прославивший наряду с Григом и Ибсеном свою Родину, прожил недолгую жизнь, полную нужды и страданий. Он умер от чахотки в возрасте двадцати семи лет. Основные открытия в математике были сделаны им в течение всего трех лет. Карл Густав Якоби, творивший в те же годы и шедший в ряде вопросов параллельно с Абелем, писал: «Он ушел от нас, но след, им оставленный, неизгладим». Эти слова оказались пророческими: почти все, что внес в науку Абель, осталось там как сокровище. Преобразование Абеля, признак сходимости Абеля, абелевы группы, интегральное уравнение Абеля, абелевы интегралы – постоянные спутники математиков, и каждому математику известна великая теорема Абеля о неразрешимости уравнений степени выше четвертой в радикалах.

Абель родился 5 августа 1802 года на юге Норвегии. Отец его был священником. В 1815 году отец отправил сына в кафедральную школу в столицу Норвегии Христианию (ныне – Осло). Абелю выпало счастье в этой школе встретить учителя, который сумел заметить и оценить его математическое дарование. Бернт Микель Хольмбое – так звали учителя – заслужил благодарную память о себе тем, что на протяжении многих лет оказывал деятельную поддержку своему выдающемуся, но несчастному ученику. Хольмбое писал: «Абель сочетает в себе гениальные математичесие способности с неистощимым интересом к науке». Изначально рука учителя написала, что «он станет самым выдающимся математиком в мире», и можно думать, что Абель оправдал бы эту высшую характеристику, если бы болезнь не свела его в могилу так рано.

Абель поступил в университет в 1821 году. Отец его умер, и у него не было средств к существованию. Он подал прошение о стипендии, но университет не располагал средствами для этого. Тогда некоторые профессора университета, «дабы сохранить для науки редкое дарование», стали выплачивать ему стипендию из своих средств. Этого было недостаточно для содержания семьи, и Абель стал подрабатывать уроками. Но он так и не избавился от нищеты.

Статья «Доказательство невозможности решения в радикалах общего уравнения выше четвертой степени» была опубликована в 1826 году, и это сразу поставило Абеля в первый ряд математиков мира. Но его следующий мемуар, представленный Парижской академии наук и переданный Коши для рецензирования и представления в печать, затерялся среди бумаг ученого. Коши разыскал его лишь после смерти Абеля. Этот труд Абеля, совместно с трудом Якоби, был удостоен большой премии Академии. Если бы эта премия досталась Абелю при жизни… Но этого не произошло, и все последние годы Абель провел в крайней нужде. Он умер 6 апреля 1829 года.

Якоби сказал о нем: «Абель умер рано, как будто он пожелал сделать лишь то, что другим не под силу, оставив нам доделать остальное».

Коснемся кратко некоторых достижений Абеля в математике.

Исследования Абеля по математическому анализу

Абель впервые стал использовать дискретный аналог интегрирования по частям. Представление суммы произведений двух сомножителей в виде

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k = a_N B_N - \sum_{k-1}^{N-1} B_k (a_{k+1} - a_k), \qquad (1)$$

где a_k, b_k − заданные числа, $B_k = b_1 + \ldots + b_k$, $1 \le \le k \le N$, получило название *преобразования Абеля*. Оно стало и остается поныне одним из важных методов классического анализа.

Если применить преобразование Абеля к ряду $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$, предположив, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, а последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена и монотонна, то получится, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится (из (1) легко извлекается оценка $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k b_k\right| \le 4 \max_{n \le k \le m} |B_k| \max\{|a_n|, |a_m|\}$, и сходимость ряда следует из признака Коши). В этом состоит *признак сходимости Абеля*. Тем же приемом доказывается признак сходимости Дирихле: если последовательность $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ монотонна и стремится к нулю, а последовательность частных сумм $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ограничена, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

Эти признаки входят ныне во все учебники по математическому анализу.

Коши ошибочно полагал, что если ряд непрерывных функций, заданных на отрезке, сходится в каждой точке, то он сходится к непрерывной функции. Абель привел контрпример: ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin kx}{k}$ сходится в каждой точке отрезка $[-\pi; \pi]$ (в этом можно убедиться, применив признак Дирихле), но представляемая им функция разрывна в некоторых точках (она равна $\frac{x}{2}$ в интервале $(-\pi; \pi)$, нулю в точках $\pm\pi$ и периодична с периодом 2π, т.е. имеет разрывы в точках $\pi + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$). Пример Абеля сыграл важную роль в формировании одного из основополагающих понятий анализа − понятия равномерной сходимости последовательности функций.

Ядро Абеля (его еще называют ядром Абеля − Пуассона) − это функция $\frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}$, $a > 0$, играющая большую роль в анализе и теории вероятностей.

Абель был первым, кому удалось решить интегральное уравнение, т.е. линейное уравнение с «бесконечным числом неизвестных». Это уравнение, получившее его имя, встречается во многих теоретических и прикладных задачах. В частности, с его помощью Риман и Лиувилль ввели понятие производной дробного порядка.

Абель создал начала теории интегрирования функций вида $\int\limits_{H(x,\, y)=0} R(x, y)\, dx$, где R − рациональная функция (т.е. отношение двух многочленов), а H − многочлен от двух переменных. Вопрос о выражении таких интегралов в элементарных функциях оказался очень глубоким. Ответ содержится в основной теореме, доказанной Абелем, и выражается через топологическую характеристику двумерных многообразий − их род (а именно − род римановой поверхности $H(z, w) = 0$ в двумерном комплексном пространстве). В.И.Арнольд в своей замечательной брошюре «Что такое математика?» (М.: МЦНМО, готовится к печати) объясняет сущность этой теоремы и в заключение пишет: «Удивительна в этой теореме связь совершенно отдаленных на первый взгляд областей математики: теории элементарных функций, интегрирования и топологии».

О разрешимости алгебраических уравнений в радикалах

А теперь расскажем о самом известном достижении Абеля − о его теореме, касающейся разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. Эта работа оказала огромное влияние на развитие алгебры, а фактически введенное в ней понятие, получившее впоследствии название *абелевой группы*, лежит в основании теории групп. Теорема Абеля имеет связи с самыми различными областями математики и имеет множество различных доказательств. Мы изложим одно из известных прямых алгебраических доказательств. Это доказательство достаточно элементарно, хотя использует комплексные числа.

Каждый из нас знает формулу для корней квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Поскольку числа $\sqrt[n]{a}$ называют радикалами, говорят, что уравнение $x^2 + px + q = 0$ *разрешимо в радикалах.*

Долгое время искали формулу для корней кубических уравнений. В середине XVI века такая формула была обнаружена. Уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ при любых комплексных a, b, c легко приводится к такому: $x^3 + px + q = 0$, а его решения находятся по формуле Кардано:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

дающей при правильном обращении со значениями кубических корней все три корня кубического уравнения. Итак, для кубического уравнения существует формула, выражающая его корни в радикалах.

Вскоре с помощью формулы Кардано было доказано, что решение всякого уравнения четвертой степени посредством некоторой стандартной процедуры сводится к решению квадратного и кубического уравнений, т.е. и для уравнения четвертой степени тоже существует формула, выражающая его корни в радикалах (квадратных и кубических).

А потом на протяжении почти трех столетий делались безуспешные попытки найти формулу для корней уравнений более высоких степеней. Этим усилиям положила конец доказанная Абелем теорема.

Теорема Абеля

Теорема Абеля. *Ни для какого натурального n, большего четырех, нельзя указать формулу, которая выражала бы корни любого уравнения через его коэффициенты при помощи радикалов.*

Мы докажем здесь несколько больше, а именно, что *существует (конкретное) уравнение пятой степени с целыми коэффициентами, не разрешимое в радикалах.*

Примером служит уравнение

$$p(x) = x^5 - 4x - 2 = 0 .$$

Можно доказать (попробуйте сделать это самостоятельно), что многочлен $p(x)$ нельзя разложить на множители меньшей степени с рациональными коэффициентами (такие многочлены называются неприводимыми – об их свойствах см. Приложение). Неразрешимость в радикалах уравнения $p(x) = 0$ следует из такого фундаментального утверждения, доказываемого нами ниже: *если неприводимое уравнение пятой степени разрешимо в радикалах, то оно имеет либо пять, либо лишь один действительный корень*. Докажем, что наше уравнение имеет три действительных корня. Обозначим корни этого уравнения $\{x_k\}_{k=1}^5$. По теореме Виета (см. Приложение), $\sigma_1 = \sum_{k=1}^5 x_k = 0$ (ибо сумма корней равна коэффициенту при x^4, а он равен нулю). Далее, $\sigma_2 = \sum_{1 \le k, l \le 5} x_k x_l = 0$ (ибо сумма попарных произведений корней равна коэффициенту при x^3, а он тоже равен нулю). Но тогда $s_2 = \sum_{k=1}^5 x_k^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 0$, откуда следует, что все пять корней вещественными быть не могут. Значит, имеется комплексный корень $a + bi$. Но тогда число $a - bi$ тоже будет корнем. А с другой стороны, наше уравнение имеет не меньше трех вещественных корней, ибо $p(-2) = -26$, $p(-1) = 1$, $p(1) = -5$, $p(2) = 22$, и существование трех корней следует из теоремы о промежуточных значениях, принимаемых непрерывной функцией. В итоге мы доказали, что многочлен $p(x)$ имеет ровно три вещественных корня.

(Приведенное доказательство – алгебраическое, и теорема Виета нам понадобится в дальнейшем, но утверждение о том, что приведенное уравнение не имеет пяти вещественных корней, совсем просто доказать аналитически: если бы оно имело пять вещественных корней, то по теореме Ролля производная $p'(x) = 5x^4 - 4$ имела бы четыре вещественных корня, а она имеет только два.)

Доказательство основного утверждения

Пусть $p(x) = x^5 + \sum_{k=0}^4 a_k x^k$ (где a_k – рациональные числа) – неприводимый многочлен (т.е. многочлен, не разлагающийся в произведение двух многочленов меньшей степени), разрешимый в радикалах. Это значит, что его корни получаются из совокупности всех дробей присоединением некоторых радикалов. Так например, корни многочлена второй степени получаются присоединением к дробям чисел вида $p_1 + p_2\sqrt{a}$, где a – это дробь, не являющаяся квадратом, а корни уравнения $x^3 + px + q = 0$ получаются присоединением к дробям сначала радикалов $\sqrt{a}$, а затем чисел вида $q_1 + q_2\sqrt[3]{c} + q_3\sqrt[3]{c^2}$, где $c = p_1 + p_2\sqrt{a}$. Числа $b + \sqrt{a}$ можно складывать, вычитать, умножать и делить (кроме, разумеется, деления на ноль). Такие числовые образования называются *полями*. Числа вида $q_1 + q_2\sqrt[3]{c} + q_3\sqrt[3]{c^2}$, где $c = p_1 + p_2\sqrt{a}$, а q_i и p_j – дроби, также образуют поле. Если $p(x)$ разрешим в радикалах, это значит, что к дробям последовательно присоединяются радикалы вида $\sqrt[n_1]{a_1}$ и образуют поле первого ранга R_1, затем присоединяется корень $\sqrt[n_2]{a_2}$, где a_2 принадлежит R_2, и т. д.

Пусть R – числовое поле, получаемое из рациональных чисел присоединением к ним всех радикалов, кроме последнего $r = \sqrt[n]{a}$, где a принадлежит R и $a \ne \alpha^n$ ни для кого α из R. Не ограничив себя в общности, можно считать, что n – простое число (ибо если n – не простое число, то его можно записать в виде $n = n_1 p$, где p – простое, после чего присоединить $\sqrt[n_1]{a} = a_1$, а затем и $\sqrt[p]{a_1}$).

По определению, $p(x)$ имеет корень в $\mathrm{R}\left(\sqrt[n]{a}\right)$ (так обозначается поле, полученное присоединением к полю R радикала $\sqrt[n]{a}$). Любое число в $\mathrm{R}\left(\sqrt[n]{a}\right)$ представимо как многочлен степени $n - 1$ от r с коэффициентами из R (см. Приложение). Мы пользуемся здесь тем, что если R – числовое поле и $r = \sqrt[n]{a}$, где n – простое число, $a \ne \alpha^n$ для α из R, то любой элемент x из $\mathrm{R}\left(\sqrt[n]{a}\right)$ единственным образом представим в виде $x = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k r^k$. Этот факт нетрудно доказать непосредственно.

Итак, пусть x_1 – вещественный корень полинома $p(x)$ (а у полинома пятой степени один вещественный корень обязательно существует – это следует из уже упоминавшегося свойства непрерывной функции принимать все промежуточные значения; полином пятой степени с положительным старшим коэффициентом при стремлении x к плюс бесконечности стремится к плюс бесконечности, т.е. становится положительным, аналогично, при отрицательных x он становится отрицательным, значит, он имеет ноль). Представим x_1 в виде $x_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k r^k$ с коэффициентами из R. Пусть $\varepsilon = e^{2\pi i / n}$ – первообразный корень из единицы и $x_k = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \varepsilon^{(k-1)j} r^j$, $1 \le k \le n$. Получили n чисел из

$\mathrm{R}\left(\sqrt[n]{a}\right)$. Рассмотрим полином

$$q(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)=$$
$$=x^n-\sigma_1 x^{n-1}+\sigma_2 x^{n-2}-\ldots+(-1)^n\sigma_n.$$

Тогда $\sigma_1=\sum_{k=1}^{n}x_k=n\alpha_0$, т.е. второй коэффициент полинома $q(x)$ принадлежит полю R. Далее, произведя возведение в квадрат, убедимся, что $s_2=\sum_{k=1}^{n}x_k^2$ – число из R, откуда из формулы (которой мы пользовались уже) $s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$ (и из равенства $\sigma_1=s_1$) получаем, что третий коэффициент полинома q тоже принадлежит R. Предлагаем читателю проверить, что так будет и дальше: все коэффициенты полинома q являются числами из R (если читатель захочет доказать это самостоятельно, он должен будет ознакомиться с формулой Ньютона, выражающей σ_k как полиномы от $s_1,\ldots,s_k$).

Отметим, что если какой-то полином $P(x)$ имеет корень r, то он имеет корнем и $\varepsilon^k r$. Действительно, полиномы P и $Q(x)=x^n-a$ имеют общий корень, а Q неприводим, значит, P делится на Q, т.е. *все* x_k *являются корнями* $P(x)$.

Более того, можно доказать, что если *неприводимый* полином P *простой* степени n становится приводимым при присоединении радикала степени k, где k – тоже простое число, то $k=n$. Мы не будем приводить здесь чисто техническое доказательство этого факта. Отсюда можно получить, что многочлен $q(x)$ является степенью многочлена $p(x)$. Но так как степени этих многочленов простые числа, то n (степень q) делится на 5, а так как n – простое число, то $n=5$ и многочлены p и q просто совпадают.

Итак,

$$p(x)=(x-x_1)\ldots(x-x_5),$$

x_1 – вещественное число, а

$$x_k=\alpha_0+\alpha_1\varepsilon^{k-1}r+\ldots+\alpha_4\varepsilon^{4(k-1)}r^4,\ r=\sqrt[5]{a},\ 1\le k\le 5.$$

При этом можно считать, что число ε присоединено к R, ибо $\sqrt[5]{1}$ выражается через биквадратные радикалы (построение правильного пятиугольника циркулем и линейкой осуществимо!).

Возможны два случая: 1) a – вещественное число; 2) a невещественно.

Рассмотрим первый случай. В силу того, что $\varepsilon\in\mathrm{R}$, можно считать, что r само вещественно. Мы обозначили через x_1 вещественный корень полинома p. Тогда $x_1=\alpha_0+\alpha_1 r+\ldots+\alpha_4 r^4$, значит, $x_1=\bar{x}_1=\bar{\alpha}_0+\bar{\alpha}_1 r+\ldots\ldots+\bar{\alpha}_4 r^4$ (через $\bar{c}$ обозначается, как обычно, число, комплексно сопряженное с c), и из единственности представления корней получаем, что все α_i вещественны. Но тогда все остальные корни комплексны. Докажем это, например, для x_2. Имеем: $x_2=\alpha_0+\alpha_1\varepsilon r+\ldots\ldots+\alpha_4\varepsilon^4 r^4$, тогда $\bar{x}_2=\alpha_0+\alpha_1\varepsilon^4 r+\ldots+\alpha_4\varepsilon r^4$. Если допустить, что $x_2=\bar{x}_2$, то получилось бы (снова из единственности представления), что $\alpha_1\varepsilon=\alpha_1\varepsilon^4$, т.е. $\alpha_1=0$, аналогично, $\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$, что невозможно.

Теперь разберем второй случай, когда a имеет модуль ρ и аргумент $\varphi\ne0$ и можно считать, что $r=\sqrt[5]{\rho}\,e^{i\varphi/5}$. Положим $R=\sqrt[5]{\rho^2}$. Тогда $\bar{r}=\frac{R}{r}$. И снова открываются две возможности: а) присоединение R ведет к разложению p; б) присоединение R не ведет к разложению p. В первом случае (так как R вещественно) дело сводится к предыдущему, и, значит, p имеет единственный вещественный корень. Остался случай б). Тогда

$$x_1=\alpha_0+\alpha_1 r+\ldots+\alpha_4 r^4=\bar{x}_1=\bar{\alpha}_0+\bar{\alpha}_1\bar{r}+\ldots+\bar{\alpha}_4\bar{r}^4=$$
$$=\frac{r^5}{a}\left(\bar{\alpha}_0+\bar{\alpha}_1\frac{R}{r}+\ldots+\bar{\alpha}_4\frac{R^4}{r^4}\right)=$$
$$=\bar{\alpha}_0+\bar{\alpha}_4\frac{R^4}{a}r+\ldots+\bar{\alpha}_1\frac{R}{a}r^4,$$

откуда в силу единственности представления x_1 приходим к равенствам

$$\alpha_0=\bar{\alpha}_0,\ \alpha_1=\bar{\alpha}_4\frac{R^4}{a},$$
$$\alpha_2=\bar{\alpha}_3\frac{R^3}{a},\ \alpha_3=\bar{\alpha}_2\frac{R^2}{a},\ \alpha_4=\bar{\alpha}_1\frac{R}{a}. \qquad (2)$$

А из этих соотношений легко доказать уже, что остальные x_k вещественны. Докажем это, к примеру, для x_2. Имеем:

$$x_2=\alpha_0+\alpha_1\varepsilon r+\ldots+\alpha_4\varepsilon^4 r^4,$$

значит,

$$\bar{x}_2=\alpha_0+\bar{\alpha}_1\bar{\varepsilon}\bar{r}+\ldots+\bar{\alpha}_4\bar{\varepsilon}^4\bar{r}^4=$$
$$=\alpha_0+\alpha_4\frac{R^4}{a}\varepsilon r+\ldots+\alpha_1\frac{R}{a}\varepsilon^4 r^4=x_2.$$

Итак, либо все корни p вещественны, либо только один. А уравнение $x^5-4x-2=0$ имеет три вещественных корня. Значит, корни этого уравнения выразить в радикалах нельзя. Теорема Абеля доказана.

Приложение

1. Числовое поле. Это множество K чисел (действительных или комплексных), содержащее 1 и 0, а также вместе с любыми двумя числами a и $b\ne0$ их произведение, сумму, разность и частное, т.е. результат любых арифметических действий над этими числами.

Множества $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел, $\boldsymbol{C}$ всех комплексных чисел, $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел, а также множества чисел вида $a+bi$ ($a\in\boldsymbol{Q}, b\in\boldsymbol{Q}$), $a+b\sqrt{2}$, $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ являются полями.

2. Неприводимые многочлены. Многочлен $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ с коэффициентами, принадлежащими некоторому числовому полю K, называется неприводимым над этим полем, если он не раскладывается на два множителя ненулевой степени с коэффициентами из этого поля. В частности, любой многочлен первой степени неприводим. Отметим, что при $n>1$ неприводимый над полем K многочлен не имеет корней, принадлежащих полю K. Неприводимые многочлены во многом аналогичны простым числам. В частности, можно доказать теорему, аналогичную основной теореме арифметики:

Всякий многочлен может быть единственным образом (с точностью до постоянных сомножителей) разложен в произведение неприводимых многочленов.

Кроме того, если многочлен $P(x)$ с коэффициентами из поля K имеет с неприводимым многочленом $Q(x)$ общий корень (не принадлежащий полю K), то $P(x)$ делится на $Q(x)$.

3. Расширение поля. Пусть K – некоторое числовое поле, $P(x)$ – неприводимый многочлен степени n над полем K, а α – корень (вообще говоря, комплексный) этого многочлена. Как было уже отмечено, $\alpha \notin K$. Обозначим через $K(\alpha)$ множество всех чисел вида $c_0 + c_1\alpha + \ldots + c_{n-1}\alpha^{n-1}$, где $c \in K$. Нетрудно доказать, что $K(\alpha)$ является полем. Поле $K(\alpha)$ называется простым алгебраическим расширением поля K.

Например, присоединяя к полю $\boldsymbol{Q}$ число $\sqrt{2}$, получаем поле $\boldsymbol{Q}\left(\sqrt{2}\right)$, присоединяя к $\boldsymbol{Q}$ число $\sqrt[3]{2}$, получаем поле $\boldsymbol{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$.

Поле комплексных чисел $\boldsymbol{C}$ получается как расширение $\boldsymbol{R}(i)$ присоединением к полю $\boldsymbol{R}$ действительных чисел корня i многочлена x^2+1. Комплексные числа имеют вид $x + iy$, где x и y – действительные числа, а $i^2 = -1$, и изображаются точками на плоскости xOy. Их можно представлять в тригонометрической форме: $x + iy = \sqrt{x^2+y^2}\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $0 \le \varphi < 2\pi$ – угол, образуемый положительным направлением оси Ox и лучом, проходящим через начало координат и точку $(x; y)$, отсчитываемый против часовой стрелки. Для сокращения записи мы используем формулу Эйлера $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$, удобную при перемножении и возведении в степень:

$$e^{i\varphi}\cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)},\quad \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}.$$

Расширение $K(\alpha)$ поля K называется радикальным, если оно получается присоединением корня неприводимого над полем K уравнения $x^n = a$, т.е. числа $\sqrt[n]{a}$, не принадлежащего полю K.

Решить уравнение $P(x) = 0$ в радикалах – значит построить цепочку последовательных радикальных расширений поля $\boldsymbol{Q}$: $\boldsymbol{Q} \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_l$ рациональных чисел так, чтобы последнее поле в этой цепочке содержало корни многочлена P.

Например, решение квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, где $p \in \boldsymbol{Q}$, $q \in \boldsymbol{Q}$, сводится к построению поля $\boldsymbol{Q}\left(\sqrt{D}\right)$, где $D = p^2 - 4q$. Решение кубического уравнения $x^3 + px + q = 0$, в силу формулы Кардано, сводится к последовательному присоединению к полю $\boldsymbol{Q}$ чисел $\sqrt{\dfrac{p^3}{27} + \dfrac{q^2}{4}}$, а затем и чисел $\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{p^3}{27} + \dfrac{q^2}{4}}}$, $\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{p^3}{27} + \dfrac{q^2}{4}}}$.

Несколько более сложно строится расширение, содержащее корни произвольного неприводимого многочлена четвертой степени.

Наличие формулы, выражающей корни уравнения степени n в радикалах, означает, что для всех многочленов данной степени существует единая схема (одинаковая для всех многочленов) построения цепочки таких расширений, дающая в конце концов возможность записать корни в виде

$$x = f(a_0, a_1, \ldots, a_n),$$

где функция f получается из коэффициентов с помощью конечного числа сложений, вычитаний, умножений, делений и извлечения корней.

4. Теорема Виета. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – корни многочлена

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Тогда

$$p(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты, получаем, что

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0},$$

....

$$\sigma_k = x_1x_2\ldots x_k + x_1x_3x_4\ldots x_{k+1} + \ldots$$

$$\ldots + x_{n-k+1}\ldots x_n = (-1)^k\frac{a_k}{a_0},$$

$$\sigma_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0}$$

(здесь σ_k – сумма всевозможных произведений по k различных чисел из набора корней $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$). Функции $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ называются основными симметрическими многочленами от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

5. Теорема о симметрических функциях. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – симметрический многочлен с коэффициентами из некоторого поля K, т.е. многочлен, не меняющийся при любых перестановках $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда существует многочлен с коэффициентами над полем K такой, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = P(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n).$$

Тем самым всякий симметрический многочлен от корней многочлена есть многочлен от его коэффициентов.

В частности, степенные суммы, т.е. выражения вида

$$S_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k,$$

выражаются через коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Соответствующие формулы называются формулами Ньютона. Мы их здесь не приводим, так как нам нужен сам факт, а не конкретный вид этих формул.

С другим доказательством теоремы Абеля можно ознакомиться по книге В.Б.Алексеева «Теорема Абеля в задачах и решениях» (М.: МЦНМО, 2001).

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

Такая задачка...

– Я сдаю жилплощадь по цене 10 центов, или 0,1 доллара, за квадратный метр, – объявила хозяйка обратившемуся к ней математику.

– Прекрасно, – обрадовался клиент, – но я хотел бы поселиться на этой жилплощади вместе со своей тещей.

– Ах, вот как! В таком случае ставка возводится в квадрат. Вы должны будете платить не 10, а 100 центов за квадратный метр.

– Но, позвольте! – возразил математик. – В таком случае вместо прежней цены 0,1 я должен буду платить всего лишь $(0{,}1)^2 = 0{,}01$ доллара за квадратный метр!

Сколько на самом деле должен платить математик?

М. Наумов