Для решения задачи используем закон сохранения механической энергии. Действительно, в рамках сделанных предположений механическую систему, состоящую из груза, нити, колес и Земли, следует считать изолированной консервативной системой. Пусть в некоторый момент времени t после начала движения скорость груза стала равна v. В соответствии с условием задачи и сказанным ранее, кинетическую энергию колеса, определяемую как сумма кинетических энергий всех его точек, можно считать равной кинетической энергии его обода, т.е. $0{,}5Mv^2$. По прошествии достаточно малого промежутка времени Δt ($\Delta t \to 0$) величина скорости груза увеличится на некоторую малую величину Δv, а приращение кинетической энергии рассматриваемой системы тел будет равно

$$\Delta W_k = 0{,}5(m+2M)\left((v+\Delta v)^2 - v^2\right) = (m+2M)v\Delta v .$$

(Утверждая это, мы считали, что кинетическая энергия Земли при опускании груза остается неизменной. Последнее утверждение может показаться неверным. В самом деле, поскольку импульс вращающегося вокруг неподвижной оси однородного тонкого обода равен нулю, как и импульс нити, то на основании закона сохранения импульса (рассматриваемая система при сделанных предположениях, конечно, является замкнутой) нужно считать, что приращения импульсов груза и Земли по отношению к инерциальной системе отсчета должны быть равны по величине. Однако, учитывая, что масса Земли во много раз больше массы груза, изменением скорости Земли по отношению к инерциальной системе отсчета, обусловленным движением груза, надо пренебречь. Поэтому следует пренебречь не только изменением кинетической энергии Земли, но и ее ускорением, обусловленным движением груза, а потому лабораторную систему отсчета действительно можно считать инерциальной.)

Поскольку выбранный промежуток времени Δt достаточно мал, величину ускорения a груза в течение этого промежутка с большой точностью можно считать постоянной. Следовательно, за этот промежуток времени скорость груза должна увеличиться на $\Delta v = a\Delta t$, а груз должен опуститься на $\Delta h = v\Delta t + 0{,}5a(\Delta t)^2$. Учитывая, что $v \gg 0{,}5a\Delta t$, последним слагаемым в предыдущей формуле следует пренебречь. Поэтому за рассматриваемый малый промежуток времени убыль потенциальной энергии системы будет равна

$$\Delta W_p = mg\Delta h = mgv\Delta t .$$

Из равенства $\Delta W_k = \Delta W_p$ получаем, что ускорение груза в течение рассматриваемого малого промежутка времени равно

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{m}{m+2M}g .$$

3. При решении задачи будем считать, что паровоз движется равномерно по прямолинейному горизонтальному участку пути и что состояние содержимого цилиндра все время близко к равновесному. Пренебрегая силами трения поршня и его штока о цилиндр, как это обычно и делается, если в условии задачи специально не оговорено иное, можно утверждать, что величина равнодействующей сил, действующих на поршень и шток со стороны цилиндра и его содержимого, равна (рис.23)

$$F_1 = (p - p_{\text{а}})S .$$

В условии задачи не указана масса штока с поршнем и шатуна. Очевидно, что решение задачи будет более простым, если пренебречь массами этих тел и считать, что на шатун не действуют силы трения. Тогда, на основании второго и третьего законов Ньютона, можно утверждать, что горизонтальная составляющая F_2 силы, действующей на ось A, равна F_1.

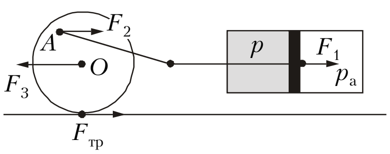

Рис. 23

На рисунке показана также сила F_3, действующая на колесо со стороны его оси O, и сила трения $F_{\text{тр}}$ со стороны дороги. Поскольку колесо вращается равномерно (по предположению, паровоз движется равномерно), сумма вращающих моментов, действующих на колесо, равна нулю. Так как вращающий момент силы F_2 максимальным будет тогда, когда оси A и O будут находиться на одной вертикали, максимальная величина силы трения колеса о рельс – силы тяги одного колеса – должна при наших предположениях удовлетворять условию

$$rF_2 = RF_{\text{тр}} .$$

Конечно, сказанное верно в предположении, что нет проскальзывания колеса по рельсу, т.е. коэффициент трения колеса о рельс достаточно велик.

Согласно второму закону Ньютона, при равномерном прямолинейном движении колеса сумма действующих на него сил равна нулю. Следовательно, величина искомой силы, действующей на ось O со стороны колеса, равна

$$F = F_3 = F_2 + F_{\text{тр}} = (p - p_{\text{а}})(1 + r/R)S .$$

4. По условию задачи малые свободные колебания легкого диска, когда тяжелый диск лежит на столе, являются гармоническими. Поэтому период малых вертикальных колебаний легкого диска равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} ,$$

где m – масса легкого диска, а k – жесткость пружины. Поскольку при всех допустимых амплитудах колебаний пружина должна подчиняться закону Гука, нарушение гармоничности колебаний может быть обусловлено только изменением характера внешних сил, действующих на диски. Очевидно, что при всех возможных амплитудах колебаний величину ускорения свободного падения ($g = 9{,}8$ м/с^2) следует считать постоянной. Поэтому нарушение гармоничности колебаний возможно только из-за изменения характера силы реакции стола на лежащий на нем диск, т.е. из-за отрыва нижнего легкого диска от поверхности стола под действием сил упругой деформации растянутой пружины. Ясно, что отрыв нижнего диска от стола произойдет в тот момент, когда величина силы упругой деформации растягивающейся пружины превысит величину силы тяжести mg, действующей на легкий диск. Поскольку в положении равновесия тяжелый диск сжимает пружину на nmg/k, нарушение гармоничности вертикальных колебаний тяжелого диска при соблюдении сделанных выше предположений должно возникнуть, если амплитуда его колебаний превысит величину

$$x_m = \frac{n+1}{k}mg = \frac{n+1}{4\pi^2}gT^2 \approx 3 \text{ см} .$$

5. Учитывая, что давление p_1 газов в баллоне не очень сильно отличается от атмосферного и их температура близка к комнатной, будем считать, что к смеси газов применимо уравнение Клапейрона–Менделеева, а потому количество молей водорода ν_{H_2} и молей кислорода ν_{O_2} можно найти из уравнения

$$p_1V = \left(\nu_{\text{H}_2} + \nu_{\text{O}_2}\right)RT_1 ,$$

где R – универсальная газовая постоянная. С другой стороны, согласно определению молярной массы,

$$m = \text{M}_{\text{H}_2}\nu_{\text{H}_2} + \text{M}_{\text{O}_2}\nu_{\text{O}_2} ,$$

где $\text{M}_{\text{H}_2} = 2$ г/моль и $\text{M}_{\text{O}_2} = 32$ г/моль – молярные массы