Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №4 за 2002 г.)

1. Покажем, что важное множество может состоять не менее чем из 24 клеток.

Любой составленный из клеток доски прямоугольник размером 1×8, 1×9 или 1×10 должен содержать не менее 2 клеток важного множества. Соответственно, в двух соседних верхних горизонталях доски должно быть не менее 4 клеток важного множества. Если мысленно убрать эти горизонтали, то из оставшейся части доски 8×10 можно образовать 8 прямоугольников размера 1×8, каждый из которых должен включать не менее 2 клеток важного множества. Таким образом, всего в важном множестве должно быть не менее $4+2\times10=24$ клетки.

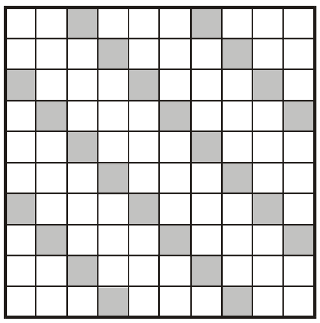

Рис. 1

Пример важного множества, состоящего из 24 клеток, показан на рисунке 1.

2. Покажем, как за три взвешивания определить, равен ли общий вес двух фальшивых монет весу двух настоящих. Разделим монеты на 4 кучки по 6 монет. Первым взвешиванием сравним вес первой и второй кучек; вторым взвешиванием – вес третьей и четвертой кучек. Рассмотрим возможные результаты взвешиваний.

1) Весы оба раза оказались в равновесии. В этом случае две фальшивые монеты могут быть только в одной кучке, причем их суммарный вес равен весу двух настоящих монет.

2) Весы оказались в равновесии только один раз. Обозначим результаты взвешиваний так: $A = B$, $C < D$ (A, B, C, D – какие-то кучки). Тогда в A и B находятся настоящие монеты, в C и D – фальшивые. Третьим взвешиванием на одну чашу весов помещаем кучки $A + B$, а на другую $C + D$. Общий вес двух фальшивых монет будет равен весу двух настоящих только в том случае, если весы при третьем взвешивании окажутся в равновесии.

3) Весы ни разу не оказались в равновесии. Обозначим результаты взвешиваний так: $A < B$, $C < D$. Если легкая фальшивая монета находится в кучке A, то более тяжелая – в кучке D, если же легкая фальшивая монета находится в кучке C, то более тяжелая – в кучке B. Как бы то ни было, две фальшивые монеты одновременно находятся либо в $A + D$, либо в $B + C$. Третьим взвешиванием сравниваем $A + D$ с $B + C$. Общий вес двух фальшивых монет будет равен весу двух настоящих только в том случае, если весы при третьем взвешивании окажутся в равновесии.

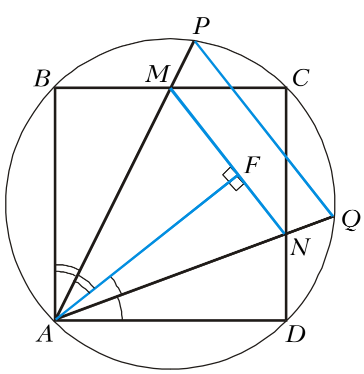

Рис. 2

3. Треугольник ABM отразим симметрично относительно гипотенузы AM, а треугольник ADN – относительно гипотенузы AN. Пусть при этом точка B перейдет в точку B', а точка D – в точку D'. Поскольку $\angle B'AM + \angle D'AN = 45^\circ$, то точки B' и D' окажутся на одном луче с вершиной в точке A. Так как $AB = AB' = AD' = AD$, то точки B' и D' совпадают друг с другом – представляют одну и ту же точку. Введем для нее обозначение F (рис.2). Так как $\angle AFN = \angle AFM = 90^\circ$, то три точки M, F и N лежат на одной прямой. Итак, ΔAMN представляет собой объединение треугольников ΔAMF и ΔANF. При этом $\angle BMA = \angle AMN$, $\angle DAQ = \angle FAQ = 45^\circ - \angle FAM = 45^\circ - \angle BAM$. Отсюда

$$\angle APQ = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{AD} + \overset{\smile}{DQ}\right) = 45^\circ + \angle DAQ =$$

$$= 45^\circ + \left(45^\circ - \angle BAM\right) = 90^\circ - \angle BAM = \angle BMA = \angle AMN.$$

Поскольку $\angle APQ = \angle AMN$, то $PQ \parallel MN$.

4. Возьмем произвольное число M. Ясно, что M – его самый большой делитель. Все остальные делители, очевидно, не превосходят $\frac{M}{2}$, поэтому общее количество делителей числа M не превышает $\frac{M}{2}+1$. Отсюда следуют неравенства $B \le \frac{A}{2}+1$ и $\frac{A}{2} \le \frac{B}{2}+1$, поэтому $\frac{A}{2} \le \frac{\frac{A}{2}+1}{2}+1 = \frac{A}{4}+\frac{3}{2}$, и $A \le 6$. Кроме того, из условия следует, что $\frac{A}{2}$ – целое число, поэтому A – четное число.

Четных чисел, не превышающих 6, всего три: 2, 4 и 6. Проверим каждое отдельно:

1) Пусть $A = 2$. Это число имеет 2 делителя, поэтому $B = 2$. Но у числа B тоже 2 делителя, а вовсе не $A/2 = 1$. Не подходит.

2) Пусть $A = 4$. Это число имеет 3 делителя, поэтому $B = 3$. У числа 3 имеется 2 делителя, что как раз равно $A/2$. Это подходит.

3) Пусть $A = 6$. Это число имеет 4 делителя, поэтому $B = 4$. У числа 4 имеется 3 делителя, что как раз равно $A/2$. Это тоже подходит.

Итак, получается, что есть две возможности: $A = 4$, $B = 3$, а также $A = 6$, $B = 4$. В первом случае сумма $A + 2B$ равна 10, во втором случае она равна 14. Но и у 10, и у 14 количество делителей одинаково и равно 4.

5. Расчертим квадрат на единичные клетки, как показано на рисунке 3. Каждый вырезанный круг полностью содержится в некотором квадрате 2×2. Назовем такой квадрат *регионом*. Докажем, что если из квадрата вырезать область, представляющую собой объединение пяти регионов, то из оставшейся части всегда можно вырезать два прямоугольника размером 1×2.

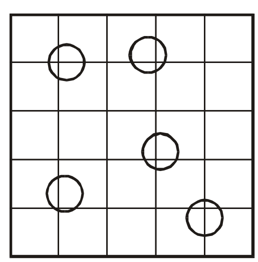

Рис. 3

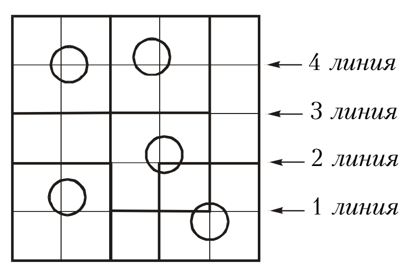

Рис. 4

Регион однозначно определяется положением его центра. Центр каждого региона находится на одной из четырех линий сетки (рис.4). Поскольку регионов пять, а линий, на которых лежат их центры, четыре, то либо 1-я и 2-я линии, либо 3-я и 4-я линии содержат не более двух центров регионов. Без ущерба для общности будем считать, что 1-я и 2-я линии со-