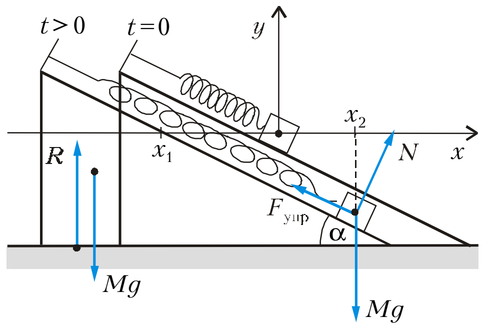

Рис. 7

Начало отсчета ЛСО соответствует такому положению бруска, при котором пружина недеформирована. Из геометрии перемещений (рис.7) с учетом последнего соотношения находим удлинение пружины:

$$\Delta L = \frac{x_2 - x_1}{\cos\alpha} = \frac{x_2}{\cos\alpha}\left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

и смещение бруска по вертикали:

$$y_2 = -x_2\left(1 + \frac{m}{M}\right)\operatorname{tg}\alpha$$

в зависимости от координаты x_2 бруска.

Квадратичная относительно смещения x_2 часть потенциальной энергии имеет вид

$$E_p = \frac{k\Delta L^2}{2} = \frac{k}{2\cos^2\alpha}\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 x_2^2$$

(линейные относительно x_2 и y_2 слагаемые сокращаются вблизи положения равновесия). Так как x_1 и y_2 линейны относительно x_2, кинетическая энергия системы клин – брусок будет квадратичной функцией горизонтальной проекции $v_{2x} = x_2'$ скорости шайбы:

$$E_k = \frac{Mv_{1x}^2}{2} + \frac{m}{2}\left(v_{2x}^2 + v_{2y}^2\right) =$$

$$= \frac{m}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right)\left(1 + \left(1 + \frac{m}{M}\right)\operatorname{tg}^2\alpha\right)\left(x_2'\right)^2 .$$

Если механическая система такова, что ее потенциальная и кинетическая энергии выражаются в зависимости от обобщенной координаты q формулами вида

$$E_p = \frac{\gamma}{2}q^2 \text{ и } E_k = \frac{\beta}{2}\left(q'\right)^2,$$

то обобщенная координата совершает гармонические колебания с круговой частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} .$$

Тогда в рассматриваемой задаче смещения тел от положения равновесия совершают гармонические колебания с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}\,\frac{\cos^2\alpha + (1 + m/M)\sin^2\alpha}{1 + m/M}} .$$

Второй способ

На брусок действуют три силы: упругости, тяжести и реакции опоры (см. рис.7). По второму закону Ньютона,

$$m\vec{a}_2 = \vec{F}_{\text{упр}} + m\vec{g} + \vec{N} .$$

Переходя к проекциям сил и ускорения на оси ЛСО, получаем

$$ma_{2x} = -k\Delta L\cos\alpha + N\sin\alpha ,$$

$$ma_{2y} = k\Delta L\sin\alpha - mg + N\cos\alpha .$$

Подставляя в эти уравнения полученные выше кинематические соотношения

$$\Delta L = \frac{x_2 - x_1}{\cos\alpha} = \frac{x_2}{\cos\alpha}\left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

и

$$a_{2y} = -a_{2x}\left(1 + \frac{m}{M}\right)\operatorname{tg}\alpha ,$$

приходим (после исключения N) к уравнению

$$m\left(\cos^2\alpha + \left(1 + \frac{m}{M}\right)\sin^2\alpha\right)a_{2x} = -k\left(1 + \frac{m}{M}\right)x_2 + mg\operatorname{tg}\alpha ,$$

описывающему гармонические колебания смещения бруска относительно положения равновесия, которое определяется соотношением

$$k\Delta L_0 = mg\sin\alpha .$$

Введение новой переменной

$$X_2 = x_2 - \frac{\Delta L_0}{\cos\alpha}$$

приводит последнее уравнение к виду

$$X_2'' = -\omega^2 X_2 ,$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}\,\frac{1 + m/M}{\cos^2\alpha + (1 + m/M)\sin^2\alpha}} .$$

Это значение циклической частоты совпадает с полученным ранее.

Задача 5*. *Гантель, стоящая на гладкой горизонтальной поверхности, начинает падать вследствие малого отклонения вправо от вертикали. Определите силу F, с которой левый шарик гантели действует на опору за мгновение до удара об опору правого шарика. Масса каждого шарика m. Ускорение свободного падения равно g.*

На гантель действуют силы тяжести и реакции опоры. Центр масс гантели будет двигаться по вертикали (горизонтальные силы отсутствуют, начальная горизонтальная скорость равна нулю). Уравнение движения центра масс в ЛСО имеет вид

$$2m\frac{dv_y}{dt} = -2mg + N .$$

В Ц-системе гантель вращается (рис.8) с угловой скоростью

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} .$$

Скорость нижней точки гантели направлена горизонтально. Следовательно, из правила сложения скоростей при любом угле α получаем

$$v_y = -\omega R\sin\alpha ,$$

где R – половина расстояния между шариками. Продифференцируем это равенство по времени:

$$\frac{dv_y}{dt} = -\left(\frac{d\omega}{dt}R\sin\alpha + \omega^2 R\cos\alpha\right)$$

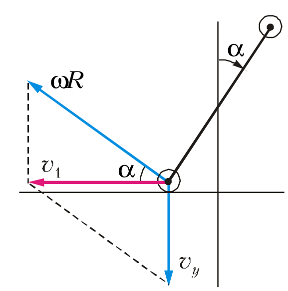

Рис. 8