Признак равенства треугольников по трем биссектрисам доказан.

Замечание. Выше мы уже доказали другие признаки равенства треугольников. Подытоживая все результаты вместе, заключаем, что *треугольники равны, если они имеют*

- *равные высоты,*
- *равные медианы,*
- *равные биссектрисы.*

Существует ли треугольник с заданными биссектрисами?

Пока остается неясным следующий вопрос. Существует ли треугольник, длины биссектрис которого равны трем наперед заданным положительным числам l_a, l_b, l_c? Должны ли мы на эти числа накладывать какие-либо ограничения, как это было в случае с высотами и медианами? Оказывается, для любых положительных чисел l_a, l_b, l_c такой треугольник существует.

Эта задача имеет длинную историю. По всей видимости, одна из первых ее формулировок принадлежит французскому математику Анри Брокару (1845–1922), хотя нет сомнений, что задача занимала умы математиков и раньше. Брокар опубликовал свою формулировку в 1875 году. В 1994 году румынские математики Петру Миронеску и Лаурентин Панаитопол в журнале «Mathematical Monthly» привели решение, основанное на теореме Брауэра о неподвижной точке.

Ниже мы приведем свое решение, в идейном плане доступное старшеклассникам, хотя и требующее для полного обоснования некоторых фактов математического анализа.[1]

Теорема. *Для любых положительных чисел l_a, l_b, l_c существует единственный треугольник с биссектрисами, длины которых равны l_a, l_b, l_c.*

Доказательство. Напомним, что биссектрисы l_a, l_b, l_c и стороны *a, b, c* любого треугольника связаны соотношениями

$$\begin{aligned} l_a^2 &= bc\left(1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right),\\ l_b^2 &= ac\left(1-\frac{b^2}{(a+c)^2}\right),\\ l_c^2 &= ab\left(1-\frac{c^2}{(a+b)^2}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Введя вспомогательные переменные ξ, η, ζ, p:

$$\begin{aligned} p &= a+b+c,\\ \xi &= \frac{a}{p},\\ \eta &= \frac{b}{p},\\ \zeta &= \frac{c}{p}, \end{aligned} \tag{13}$$

равенства (12) запишем в таком виде:

$$\begin{aligned} \frac{l_a^2(1-\xi)^2\xi}{1-2\xi} &= p^2\eta\zeta\xi,\\ \frac{l_b^2(1-\eta)^2\eta}{1-2\eta} &= p^2\eta\zeta\xi,\\ \frac{l_c^2(1-\zeta)^2\zeta}{1-2\zeta} &= p^2\eta\zeta\xi. \end{aligned} \tag{14}$$

Заметим, что вещественная функция $\varphi = \frac{(1-x)^2 x}{1-2x}$ на интервале $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ – непрерывная и монотонно возрастающая. Последний факт следует из того, что ее производная

$$\varphi'(x) = \frac{(1-x)\left(4x^2-3x+1\right)}{(1-2x)^2}$$

на указанном интервале положительна. Значит, обратная к φ функция f также непрерывная и возрастающая.

Теперь равенства (14) можно переписать так:

$$\begin{aligned} \xi &= f\left(\frac{t}{l_a^2}\right),\\ \eta &= f\left(\frac{t}{l_b^2}\right),\\ \zeta &= f\left(\frac{t}{l_c^2}\right), \end{aligned} \tag{15}$$

где $t = p^2\eta\zeta\xi$. Поскольку

$$\xi+\eta+\zeta = \frac{a}{p}+\frac{b}{p}+\frac{c}{p} = \frac{a+b+c}{p} = 1,$$

получаем уравнение

$$f\left(\frac{t}{l_a^2}\right)+f\left(\frac{t}{l_b^2}\right)+f\left(\frac{t}{l_c^2}\right) = 1.$$

В его левой части стоит возрастающая функция, при $t \to 0$ стремящаяся к 0, а при $t \to +\infty$ – к $\frac{3}{2}$. Значит, решение уравнения $t = t_0$ существует и единственно.

Зная $t = t_0$, находим ξ_0, η_0 и ζ_0 из (15), затем находим p_0 из соотношения $p = \sqrt{\frac{t}{\eta\zeta\xi}}$ и, наконец, получаем $a_0 = \xi_0 p_0$, $b_0 = \eta_0 p_0$ и $c_0 = \zeta_0 p_0$.

Таким образом, по длинам биссектрис l_a, l_b, l_c длины сторон *a, b, c* треугольника определяются однозначно. Теорема доказана.

В этом месте читатель не найдет традиционного упражнения: «постройте треугольник по трем его биссектрисам». Располагая лишь классическим набором инструментов – линейкой без делений и циркулем, выполнить такое построение невозможно. Это доказал в 1896 году П.Барбарин. С доказательством этого факта можно познакомиться в статье Ю.И. Манина [2].

Литература

1. *Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др.* Геометрия 7–9. – М.: Просвещение, 2001.

2. *Манин Ю.И.* О разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки // Энциклопедия элементарной математики. Т. IV. – М.: Наука, 1961. – С.205–227.

[1] *Несколько более длинные решения редакция получила от Ю.Томчука и Н.Осипова.*