Упражнения

1. Докажите, что если справедливо соотношение (2), то совокупность неравенств

$$\begin{aligned} a+b&>c,\\ b+c&>a,\\ c+a&>b \end{aligned} \qquad (3)$$

эквивалентна совокупности неравенств

$$\begin{aligned} \eta_a+\eta_b&>\eta_c,\\ \eta_b+\eta_c&>\eta_a,\\ \eta_c+\eta_a&>\eta_b. \end{aligned} \qquad (4)$$

2. Покажите, что

$$S=\left((\eta_a+\eta_b+\eta_c)(\eta_a+\eta_b-\eta_c)(\eta_b+\eta_c-\eta_a)(\eta_c+\eta_a-\eta_b)\right)^{-1/2}. \quad (5)$$

Итак, если длины высот h_a, h_b, h_c удовлетворяют неравенствам (4), то площадь S треугольника вычисляется однозначно по формуле (5). Но в этом случае равенства (1) позволяют однозначно вычислить и длины сторон треугольника a, b, c.

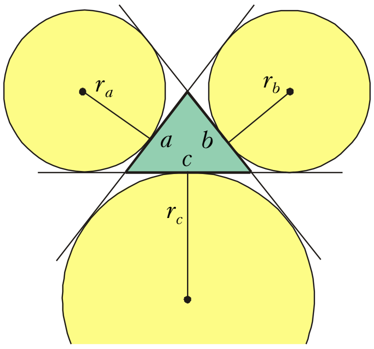

Рис. 2

Упражнения

3. Однозначно ли определяют треугольник радиусы r_a, r_b, r_c вневписанных окружностей (рис.2)?

4. Постройте треугольник по трем высотам h_a, h_b, h_c.

Однозначно ли определяется треугольник своими медианами?

В школьном курсе геометрии (см., например, [1], с.212, задача 788) доказывается, что из медиан произвольного треугольника можно составить треугольник. Следовательно, если треугольник с заданными длинами медиан m_a, m_b, m_c существует, то величины m_a, m_b, m_c должны удовлетворять неравенствам

$$\begin{aligned} m_a+m_b&>m_c,\\ m_b+m_c&>m_a,\\ m_c+m_a&>m_b. \end{aligned} \qquad (6)$$

Для исследования вопроса об однозначности восстановления треугольника по его трем медианам удобно воспользоваться известными соотношениями, связывающими длины медиан треугольника с его сторонами a, b, c:

$$\begin{aligned} 2m_a^2&=2\left(b^2+c^2\right)-a^2,\\ 2m_b^2&=2\left(c^2+a^2\right)-b^2,\\ 2m_c^2&=2\left(a^2+b^2\right)-c^2. \end{aligned} \qquad (7)$$

Упражнения

5. Докажите, что если длины медиан m_a, m_b, m_c треугольника удовлетворяют неравенствам (6), то стороны этого треугольника a, b, c в силу равенств (7) определяются однозначно.

6. Постройте треугольник по трем медианам m_a, m_b, m_c.

Однозначно ли определяется треугольник своими биссектрисами?

Сначала предположим, что треугольник с некоторыми заданными длинами трех биссектрис существует. В этом случае докажем, что треугольник своими биссектрисами определяется однозначно. А именно, докажем следующий признак равенства треугольников.

Теорема. *Если три биссектрисы одного треугольника соответственно равны трем биссектрисам другого треугольника, то эти треугольники равны.*

Доказательство. Пусть треугольники Δ_1 и Δ_2 имеют соответственно равные биссектрисы. Назовем соответственными сторонами этих двух треугольников стороны, к которым проведены равные биссектрисы. Достаточно рассмотреть два случая:

1) все стороны одного треугольника не меньше соответственных сторон другого треугольника;

2) ровно одна сторона одного треугольника меньше соответственной стороны другого треугольника.

Рассмотрим случай 1).

Если все соответственные стороны треугольников равны, то эти треугольники равны по третьему признаку равенства треугольников.

Предположим, что у треугольников имеются неравные соответственные стороны. Во-первых, заметим, что треугольники не могут быть подобными с коэффициентом подобия, отличным от 1. В противном случае биссектрисы одного из треугольников были бы больше соответствующих биссектрис другого. Следовательно, у треугольников имеются неравные углы. Не умаляя общности, будем считать, что стороны треугольника Δ_1 не меньше соответственных сторон треугольника Δ_2. Поскольку у треугольников Δ_1 и Δ_2 имеются неравные углы, то в треугольнике Δ_1 найдется угол φ_1, меньший соответственного угла φ_2 в треугольнике Δ_2. Если угол φ_1 в треугольнике Δ_1 образован сторонами p_1, q_1, а угол φ_2 в треугольнике Δ_2 образован сторонами p_2, q_2, то для длин биссектрис l_1, l_2 этих углов имеем

$$l_1=\frac{2\cos\frac{\varphi_1}{2}}{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}},\quad l_2=\frac{2\cos\frac{\varphi_2}{2}}{\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}}. \qquad (8)$$

Здесь мы воспользовались формулой

$$l=\frac{2\cos\frac{\varphi}{2}}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}, \qquad (9)$$

связывающей длину биссектрисы l со значением угла φ, в котором она проведена, а также с длинами p и q образующих этот угол сторон треугольника.

Упражнение 7. Выведите формулу (9).

Вернемся к соотношениям (8). Так как $\varphi_2>\varphi_1$, $p_2\le p_1$, $q_2\le q_1$, то $l_2<l_1$ – противоречие.

Итак, в рассматриваемом случае треугольники могут иметь только равные соответственные стороны.

Рассмотрим случай 2).

Без ограничения общности можно считать, что стороны a_1, b_1, c_1 треугольника Δ_1 соответственны сторонам a_2, b_2, c_2 треугольника Δ_2, причем

$$a_1<a_2,\quad b_1\ge b_2,\quad c_1\ge c_2. \qquad (10)$$

Воспользовавшись еще одной известной формулой, связывающей длину биссектрисы с длинами сторон треугольника, имеем

$$\begin{aligned} l_{a_1}^2&=b_1c_1\left(1-\frac{a_1^2}{(b_1+c_1)^2}\right),\\ l_{a_2}^2&=b_2c_2\left(1-\frac{a_2^2}{(b_2+c_2)^2}\right). \end{aligned} \qquad (11)$$

С учетом неравенств (10), из (11) следует $l_{a_2}^2<l_{a_1}^2$ – противоречие.