Всякий многочлен может быть единственным образом (с точностью до постоянных сомножителей) разложен в произведение неприводимых многочленов.

Кроме того, если многочлен $P(x)$ с коэффициентами из поля K имеет с неприводимым многочленом $Q(x)$ общий корень (не принадлежащий полю K), то $P(x)$ делится на $Q(x)$.

3. Расширение поля. Пусть K – некоторое числовое поле, $P(x)$ – неприводимый многочлен степени n над полем K, а α – корень (вообще говоря, комплексный) этого многочлена. Как было уже отмечено, $\alpha \notin K$. Обозначим через $K(\alpha)$ множество всех чисел вида $c_0 + c_1\alpha + \ldots + c_{n-1}\alpha^{n-1}$, где $c \in K$. Нетрудно доказать, что $K(\alpha)$ является полем. Поле $K(\alpha)$ называется простым алгебраическим расширением поля K.

Например, присоединяя к полю $\boldsymbol{Q}$ число $\sqrt{2}$, получаем поле $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$, присоединяя к $\boldsymbol{Q}$ число $\sqrt[3]{2}$, получаем поле $\boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{2})$.

Поле комплексных чисел $\boldsymbol{C}$ получается как расширение $\boldsymbol{R}(i)$ присоединением к полю $\boldsymbol{R}$ действительных чисел корня i многочлена x^2+1. Комплексные числа имеют вид $x+iy$, где x и y – действительные числа, а $i^2=-1$, и изображаются точками на плоскости xOy. Их можно представлять в тригонометрической форме: $x+iy = \sqrt{x^2+y^2}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $0 \le \varphi < 2\pi$ – угол, образуемый положительным направлением оси Ox и лучом, проходящим через начало координат и точку $(x;y)$, отсчитываемый против часовой стрелки. Для сокращения записи мы используем формулу Эйлера $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$, удобную при перемножении и возведении в степень:

$$e^{i\varphi}\cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)},\quad \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}.$$

Расширение $K(\alpha)$ поля K называется радикальным, если оно получается присоединением корня неприводимого над полем K уравнения $x^n = a$, т.е. числа $\sqrt[n]{a}$, не принадлежащего полю K.

Решить уравнение $P(x)=0$ в радикалах – значит построить цепочку последовательных радикальных расширений поля $\boldsymbol{Q}$: $\boldsymbol{Q} \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_l$ рациональных чисел так, чтобы последнее поле в этой цепочке содержало корни многочлена P.

Например, решение квадратного уравнения $x^2+px+q=0$, где $p \in \boldsymbol{Q}$, $q \in \boldsymbol{Q}$, сводится к построению поля $\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$, где $D = p^2-4q$. Решение кубического уравнения $x^3+px+q=0$, в силу формулы Кардано, сводится к последовательному присоединению к полю $\boldsymbol{Q}$ чисел $\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}$, а затем и чисел $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}$, $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}$.

Несколько более сложно строится расширение, содержащее корни произвольного неприводимого многочлена четвертой степени.

Наличие формулы, выражающей корни уравнения степени n в радикалах, означает, что для всех многочленов данной степени существует единая схема (одинаковая для всех многочленов) построения цепочки таких расширений, дающая в конце концов возможность записать корни в виде

$$x = f(a_0, a_1, \ldots, a_n),$$

где функция f получается из коэффициентов с помощью конечного числа сложений, вычитаний, умножений, делений и извлечения корней.

4. Теорема Виета. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – корни многочлена

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Тогда

$$p(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты, получаем, что

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sigma_k = x_1x_2\ldots x_k + x_1x_3x_4\ldots x_{k+1} + \ldots$$
$$\ldots + x_{n-k+1}\ldots x_n = (-1)^k\frac{a_k}{a_0},$$

$$\sigma_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0}$$

(здесь σ_k – сумма всевозможных произведений по k различных чисел из набора корней $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$). Функции $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ называются основными симметрическими многочленами от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

5. Теорема о симметрических функциях. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ – симметрический многочлен с коэффициентами из некоторого поля K, т.е. многочлен, не меняющийся при любых перестановках $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда существует многочлен с коэффициентами над полем K такой, что

$$f(x_1,\ldots,x_n) = P(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n).$$

Тем самым всякий симметрический многочлен от корней многочлена есть многочлен от его коэффициентов.

В частности, степенные суммы, т.е. выражения вида

$$S_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k,$$

выражаются через коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Соответствующие формулы называются формулами Ньютона. Мы их здесь не приводим, так как нам нужен сам факт, а не конкретный вид этих формул.

С другим доказательством теоремы Абеля можно ознакомиться по книге В.Б.Алексеева «Теорема Абеля в задачах и решениях» (М.: МЦНМО, 2001).

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

Такая задачка...

– Я сдаю жилплощадь по цене 10 центов, или 0,1 доллара, за квадратный метр, – объявила хозяйка обратившемуся к ней математику.

– Прекрасно, – обрадовался клиент, – но я хотел бы поселиться на этой жилплощади вместе со своей тещей.

– Ах, вот как! В таком случае ставка возводится в квадрат. Вы должны будете платить не 10, а 100 центов за квадратный метр.

– Но, позвольте! – возразил математик. – В таком случае вместо прежней цены 0,1 я должен буду платить всего лишь $(0{,}1)^2 = 0{,}01$ доллара за квадратный метр!

Сколько на самом деле должен платить математик?

М. Наумов