изведений двух сомножителей в виде

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k = a_N B_N - \sum_{k-1}^{N-1} B_k (a_{k+1} - a_k), \qquad (1)$$

где a_k, b_k – заданные числа, $B_k = b_1 + \ldots + b_k$, $1 \le k \le N$, получило название *преобразования Абеля*. Оно стало и остается поныне одним из важных методов классического анализа.

Если применить преобразование Абеля к ряду $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$, предположив, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, а последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена и монотонна, то получится, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится (из (1) легко извлекается оценка $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k b_k\right| \le 4 \max_{n \le k \le m} |B_k| \max\{|a_n|, |a_m|\}$, и сходимость ряда следует из признака Коши). В этом состоит *признак сходимости Абеля*. Тем же приемом доказывается признак сходимости Дирихле: если последовательность $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ монотонна и стремится к нулю, а последовательность частных сумм $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ограничена, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

Эти признаки входят ныне во все учебники по математическому анализу.

Коши ошибочно полагал, что если ряд непрерывных функций, заданных на отрезке, сходится в каждой точке, то он сходится к непрерывной функции. Абель привел контрпример: ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin kx}{k}$ сходится в каждой точке отрезка $[-\pi; \pi]$ (в этом можно убедиться, применив признак Дирихле), но представляемая им функция разрывна в некоторых точках (она равна $\frac{x}{2}$ в интервале $(-\pi; \pi)$, нулю в точках $\pm\pi$ и периодична с периодом 2π, т.е. имеет разрывы в точках $\pi + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$). Пример Абеля сыграл важную роль в формировании одного из основополагающих понятий анализа – понятия равномерной сходимости последовательности функций.

Ядро Абеля (его еще называют ядром Абеля – Пуассона) – это функция $\frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2 + x^2}$, $a > 0$, играющая большую роль в анализе и теории вероятностей.

Абель был первым, кому удалось решить интегральное уравнение, т.е. линейное уравнение с «бесконечным числом неизвестных». Это уравнение, получившее его имя, встречается во многих теоретических и прикладных задачах. В частности, с его помощью Риман и Лиувилль ввели понятие производной дробного порядка.

Абель создал начала теории интегрирования функций вида $\int\limits_{H(x,y)=0} R(x, y)\,dx$, где R – рациональная функция (т.е. отношение двух многочленов), а H – многочлен от двух переменных. Вопрос о выражении таких интегралов в элементарных функциях оказался очень глубоким. Ответ содержится в основной теореме, доказанной Абелем, и выражается через топологическую характеристику двумерных многообразий – их род (а именно – род римановой поверхности $H(z, w) = 0$ в двумерном комплексном пространстве). В.И.Арнольд в своей замечательной брошюре «Что такое математика?» (М.: МЦНМО, готовится к печати) объясняет сущность этой теоремы и в заключение пишет: «Удивительна в этой теореме связь совершенно отдаленных на первый взгляд областей математики: теории элементарных функций, интегрирования и топологии».

О разрешимости алгебраических уравнений в радикалах

А теперь расскажем о самом известном достижении Абеля – о его теореме, касающейся разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. Эта работа оказала огромное влияние на развитие алгебры, а фактически введенное в ней понятие, получившее впоследствии название *абелевой группы*, лежит в основании теории групп. Теорема Абеля имеет связи с самыми различными областями математики и имеет множество различных доказательств. Мы изложим одно из известных прямых алгебраических доказательств. Это доказательство достаточно элементарно, хотя использует комплексные числа.

Каждый из нас знает формулу для корней квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Поскольку числа $\sqrt[n]{a}$ называют радикалами, говорят, что уравнение $x^2 + px + q = 0$ *разрешимо в радикалах.*

Долгое время искали формулу для корней кубических уравнений. В середине XVI века такая формула была обнаружена. Уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ при любых комплексных a, b, c легко приводится к такому: $x^3 + px + q = 0$, а его решения находятся по формуле Кардано:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

дающей при правильном обращении со значениями кубических корней все три корня кубического уравнения. Итак, для кубического уравнения существует формула, выражающая его корни в радикалах.

Вскоре с помощью формулы Кардано было доказано, что решение всякого уравнения четвертой степени посредством некоторой стандартной процедуры сводится к решению квадратного и кубического уравнений, т.е. и для уравнения четвертой степени тоже существует формула, выражающая его корни в радикалах (квадратных и кубических).

А потом на протяжении почти трех столетий делались безуспешные попытки найти формулу для корней уравнений более высоких степеней. Этим усилиям положила конец доказанная Абелем теорема.