Решение. Во-первых, очевидно, что $x^2+2x-2=\left(x^2+2x-3\right)+1$, так что, если обозначить x^2+2x-3 через t, то $x^2+2x-2=t+1$.

Во-вторых, заметим, что

$$2\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{1+\left(7+4\sqrt{3}\right)}=\sqrt{1+\left(2+\sqrt{3}\right)^2},$$

поэтому, если обозначить $7+4\sqrt{3}$ через a, можно провести следующую цепочку равносильных в области определения преобразований данного уравнения (конечно, с учетом введенных обозначений):

$$(8)\Leftrightarrow \log_{\sqrt{1+a}}(t+1)=\log_{\sqrt{a}}t\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{a+1}(t+1)=\log_a t\,. \qquad (8^*)$$

Заметим теперь, что, очевидно, $a=7+4\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2>1$, $t>0$ (иначе не существует логарифм в правой части (8*), поэтому $t+1>1$, но тогда $t>1$ (в противном случае левая часть уравнения (8*) положительна, а правая – отрицательна). Итак, мы пришли к уравнению (8*), где $t>1$, $a>1$.

Перейдем в уравнении (8*) к новому основанию логарифмов, например к основанию 2:

$$(8^*)\Leftrightarrow\frac{\log_2(t+1)}{\log_2(a+1)}=\frac{\log_2 t}{\log_2 a}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\log_2(t+1)}{\log_2 t}=\frac{\log_2(a+1)}{\log_2 a}\,. \qquad (8^{**})$$

Пусть $f(z)=\dfrac{\log_2(z+1)}{\log_2 z}$, тогда, как легко видеть, уравнение (8**) можно записать в виде

$$f(t)=f(a)\,. \qquad (8^{***})$$

Это уравнение имеет очевидный корень $t=a$. Если нам удастся доказать, что функция $y=f(z)$ монотонна при $z>1$, из этого будет следовать (теорема о корне), что других решений нет. Докажем это.

Для этого достаточно заметить, что при всех k, кроме нуля, выполняется равенство $k+1=k\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$. Поэтому при всех допустимых в нашей задаче значениях z (т.е. при $z>1$)

$$f(z)=\frac{\log_2(z+1)}{\log_2 z}=$$

$$=\frac{\log_2\left(z\left(1+\frac{1}{z}\right)\right)}{\log_2 z}=\frac{\log_2 z+\log_2\left(1+\frac{1}{z}\right)}{\log_2 z}=1+\frac{\log_2\left(1+\frac{1}{z}\right)}{\log_2 z}\,.$$

При $z>1$ сумма $1+(1/z)$, очевидно, убывает; логарифм по основанию 2 – возрастающая функция, т.е. числитель последней дроби в последнем равенстве убывает, а знаменатель возрастает. А так как они при этом еще и положительны, эта дробь убывает с ростом z.

Таким образом, функция $y=f(z)$ убывает при $z>1$, и уравнение (8***) имеет единственное решение $t=a$. Осталось найти корни исходного уравнения (8):

$$x^2+2x-3=7+4\sqrt{3}\Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{11+4\sqrt{3}}\,.$$

Ответ: $x=-1\pm\sqrt{11+4\sqrt{3}}$.

В решении последней задачи нам встретились важные соображения, которые мы сформулируем в виде следующих утверждений.

(С) *а) Если числитель и знаменатель дроби положительны, числитель убывает (возрастает), а знаменатель возрастает (соответственно, убывает), то дробь убывает (возрастает).* (См. также замечание после решения задачи 6.)

б) Если функция $y=g(x)$ определена и возрастает (убывает) на промежутке I, а функция $z=f(y)$ определена и возрастает на промежутке I_1, содержащем область значений функции g, то сложная функция $y=f(g(x))$ определена и возрастает (соответственно, убывает) на промежутке I.

Задача 13. *Решите уравнение*

$$\log_2(4x+1)\cdot\log_5(4x+4)+\log_3(4x+2)\cdot\log_4(4x+3)=$$
$$=2\log_3(4x+2)\cdot\log_5(4x+4)\,. \qquad (9)$$

Решение. Сделаем замену переменной $t=4x+1$ и, разбив правую часть данного уравнения на два одинаковых слагаемых, преобразуем уравнение (9) так, чтобы можно было разложить левую и правую части нового уравнения на множители:

$$\log_2 t\cdot\log_5(t+3)-\log_3(t+1)\cdot\log_5(t+3)=$$
$$=\log_3(t+1)\cdot\log_5(t+3)-\log_3(t+1)\cdot\log_4(t+2)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\log_5(t+3)\cdot\left(\log_2 t-\log_3(t+1)\right)=$$
$$=\log_3(t+1)\cdot\left(\log_5(t+3)-\log_4(t+2)\right)\,. \qquad (9^*)$$

Заметим теперь, что уравнение (9*) имеет корень $t=2$ (это число обращает в нули скобки в его правой и левой частях), и попробуем показать, что других корней оно (а вместе с ним и данное уравнение) не имеет.

Рассмотрим функцию $f(z)=\log_a z-\log_{a+1}(z+1)$, где $a>1$, и докажем ее монотонность. Для этого преобразуем разность логарифмов, перейдя во втором логарифме к основанию a и используя для представления суммы $(z+1)$ тот же прием, что в предыдущей задаче:

$$f(z)=\log_a z-\frac{\log_a(z+1)}{\log_a(a+1)}=$$

$$=\log_a z-\frac{\log_a\left(z\left(1+\frac{1}{z}\right)\right)}{\log_a(a+1)}=\log_a z-\frac{\log_a+\log_a\left(1+\frac{1}{z}\right)}{\log_a(a+1)}=$$

$$=\left(\log_a z-\frac{\log_a z}{\log_a(a+1)}\right)-\frac{\log_a\left(1+\frac{1}{z}\right)}{\log_a(a+1)}=$$

$$=\log_a z\left(1-\log_{a+1}a\right)-\log_{a+1}\left(1+\frac{1}{z}\right).$$

Заметим теперь, что функцию $f(z)$ нам удалось представить как разность возрастающей функции $\log_a z\left(1-\log_{a+1}a\right)$ (она возрастает, так как $\log_{a+1}a<1$, поэтому $1-\log_{a+1}a>0$ и функция $\log_a z$ возрастает – по условию, $a>1$) и убывающей функции $\log_{a+1}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)$. Поэтому (см. утверждение (В)) функция $f(z)$ возрастает.

Осталось заметить, что первый множитель в левой части уравнения (9*) положителен при всех допустимых значениях t (т.е. при всех $t>0$), а второй множитель – это функция $f(z)$ при $a=2$, а раз она возрастает и равна, как мы видели, нулю при $t=2$, то левая часть уравнения (9*) отрицательна при $t<2$ и положительна при $t>2$. Первый множитель правой части уравнения (9*) также положителен при всех $t>0$, а второй множитель – это взятая со знаком минус функция $f(z)$ при $a=4$. Поэтому при всех допустимых значениях t, кроме $t=2$, левая и правая части уравнения (9*) имеют разные знаки, и их значения не могут совпадать, т.е.