Задача 5. *Решите неравенство*

$$\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{3x-2}<4. \qquad (4)$$

Решение. Найдем область допустимых значений переменной данного неравенства:

$$\begin{cases} x^2+x-2\geq 0, \\ 3x-2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 1.$$

При этих значениях x левая часть (4) – возрастающая функция (вершина параболы – графика квадратного трехчлена $y=x^2+x-2$ – имеет абсциссу $x=-0{,}5$, поэтому при $x\geq 1$ первое подкоренное выражение, а вместе с ним и все первое слагаемое левой части (4), возрастает, второе слагаемое – также возрастающая функция), а правая часть – константа. Поскольку при $x=2$ левая часть (4) равна правой, данное неравенство справедливо при всех допустимых значениях x, меньших 2 (при бóльших значениях x левая часть (4) больше, чем при $x=2$).

Ответ: $1\leq x<2$.

Замечание. Полезно отметить, что мы, по существу, использовали следующее утверждение: *если $y=f(x)$ – функция, возрастающая на промежутке $[a;b]$, то для любого числа c, такого что $a<c<b$, неравенство $f(x)<f(c)$ равносильно неравенству $a\leq x<c$.*

Решим теперь несколько более сложную задачу.

Задача 6. *Решите уравнение*

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}+x=\frac{24}{5}.$$

Решение. Ясно, что отрицательных корней данное уравнение иметь не может (при отрицательных значениях x его левая часть отрицательна, а правая – положительна). Не очень сложно угадать один его корень: $x=4$. Покажем, что других корней нет. Для этого убедимся в том, что функция $y=f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ возрастает при положительных значениях x. Действительно, при таких x справедливо равенство $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}$. Дальше рассуждаем стандартным образом: подкоренное выражение в знаменателе последней дроби при $x>0$ убывает, поэтому и сам знаменатель убывает, но тогда дробь возрастает – ее числитель не меняется, а знаменатель убывает.

Ответ: $x=4$.

Замечание. Очень важно научиться легко ориентироваться в подобных ситуациях: что будет с дробью, если ее числитель растет, а знаменатель убывает и при этом (очень важно!) они положительны (или отрицательны); числитель убывает, знаменатель растет и т.п.

Упражнения

5. Исследуйте на монотонность функции:

а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; б) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; в) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

6. Решите уравнения и неравенства:

а) $\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-3}=\sqrt{3}$;

б) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}-x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; в) $4^x-3^x=37$;

г) $x^{10}+\sqrt{x-1}\geq 33$; д) $x^5+x^3+2\sqrt{x}\geq 4$;

е) $2^{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}<1$.

«Встречная» монотонность

Приведем теперь еще одну очевидную, но часто употребляющуюся переформулировку теоремы (А) о корне (ее иногда называют теоремой о «встречной» монотонности).

(А**) *Пусть функция $y=f(x)$ возрастает на промежутке I, а функция $y=g(x)$ убывает на этом промежутке. Тогда уравнение $f(x)=g(x)$ имеет на промежутке I не более одного корня.*

Задача 7. *Решите уравнение*

$$x^2-x+2=\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}. \qquad (5)$$

Решение. Правая часть уравнения (5) – функция, убывающая на своей области определения, т.е. при всех значениях $x\geq 1$:

$$\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}=\frac{(x+7)-(x-1)}{\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}}=\frac{8}{\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}};$$

очевидно, что дробь, у которой числитель постоянен, а знаменатель возрастает, убывает. С другой стороны, при $x\geq 1$ квадратный трехчлен, стоящий в левой части уравнения (5), возрастает, так как вершина его графика, параболы, имеет абсциссу, равную 0,5, а ее ветви направлены вверх. Таким образом, у нас имеется ситуация, описанная в утверждении (А**), и уравнение (5) имеет не более одного корня. Но при $x=2$ левая часть (5) равна правой.

Ответ: $x=2$.

Задача 8. *Решите неравенство*

$$3^x-7>4^{\frac{1}{x}}.$$

Решение. Очевидно, при $x<0$ неравенство решений не имеет: его левая часть отрицательна, а правая – положительна; $x=0$ – тоже не решение. Пусть теперь $x>0$. Тогда левая часть данного неравенства возрастает, а правая – убывает (с ростом x показатель степени убывает) – опять «встречная» монотонность. При $x=2$ левая часть равна правой (и равна 2). Поэтому при $x>2$ левая часть больше двух, а правая часть меньше двух, и данное неравенство будет выполнено. При $0<x<2$ левая часть меньше двух, а правая – больше, так что эти значения x не являются решениями.

Ответ: $x>2$.

Задача 9. *Решите неравенство*

$$4\operatorname{arctg} x<\frac{\pi}{x}.$$

Решение. Функция $y=4\operatorname{arctg} x$ возрастает на всей числовой оси. Функция $y=\dfrac{\pi}{x}$ убывает и при $x<0$, и при $x>0$. Поэтому рассмотрим отдельно отрицательные и положительные значения x. На каждом из этих множеств имеется «встречная» монотонность (см. рисунок). Корни соответствующего уравнения угадываются легко: $x=\pm 1$ (можно воспользоваться и нечетностью левой и правой частей).

Ответ: $x<-1$, $0<x<1$.