

Докажем, что дробь $\frac{n^2 - m^2}{m^2 + 2mn}$ несократима.

Предположим, что оба числа $n^2 - m^2$ и $m(m + 2n)$ делятся на некоторое простое число p . Рассмотрим множители второго числа. Если m делится на p , то n на p не делится в силу взаимной простоты чисел m и n . Но тогда $n^2 - m^2$ на p не делится, чего не может быть. Следовательно, на p делится число $m + 2n$, а число m не делится. В этом случае на p будет делиться

$$4(n(m + 2n) - (n^2 - m^2)) - (m + 2n)^2 = 3m^2.$$

Так как m^2 не делится на p , то на p делится 3. Итак, число p может быть только тройкой: $p = 3$.

В самом начале доказательства мы предположили, что $c + a - b$ не делится на 3. Поскольку $\frac{m}{n} = \frac{b}{c + a}$, то $\frac{m}{n - m} = \frac{b}{c + a - b}$; отсюда заключаем, что $n - m$ не делится на 3. Но по нашему предположению $n^2 - m^2 = (n - m)(n + m)$ делится на 3, поэтому на 3 делится число $n + m$, а значит, и число $m(n + m) = mn + m^2 = (m^2 + 2mn) - mn$. Поскольку по предположению число $m^2 + 2mn$ делится на 3, отсюда следует, что mn делится на 3, т.е. n делится на 3. Из

делимости на 3 разности $n^2 - m^2$ следует, что и m должно делиться на 3, что невозможно. Итак, дробь $\frac{n^2 - m^2}{m^2 + 2mn} = \frac{a}{b}$ несократима. В силу взаимной простоты чисел a и b отсюда заключаем, что $a = n^2 - m^2$, $b = m^2 + 2mn$ и, следовательно, $c = m^2 + mn + n^2$. Теорема доказана.

Заметим, что соотношения (2) были известны уже Диофанту (ок. 250 г.).

Упражнение 1. Докажите, что для любых натуральных m и n ($n > m$) числа a, b, c , рассчитанные по формулам (2), удовлетворяют равенству (1).

Целочисленные треугольники с углом 60°

Длины сторон a, b, c треугольников с углом 60° удовлетворяют уравнению

$$a^2 - ab + b^2 = c^2, \quad (3)$$

получающегося из тех же соображений, что и уравнение (1). Здесь также можно искать натуральные решения уравнения (3), развивая соответствующую теорию. Однако мы поступим более хитрым образом. На сей раз алгебре будет помогать геометрия. Оказывается, всякий треугольник с углом 60° родственен некоторому треугольнику с углом 120° ! Вот как устанавливаются эти «родственные узлы».

Вначале заметим, что если к углу 60° в треугольнике примыкают две равные стороны $a = b$, то в соответствии с (3) получаем $a = b = c$. Итак, уравнение (3) допускает тривиальное решение $a = b = c = n$, где n — любое натуральное число. Пусть теперь к углу 60° в треугольнике примыкают две различающиеся по длине стороны. Без ограничения общности будем полагать $b > a$. Выделив внутри данного треугольника правильный треугольник с длиной стороны a , получим дополнительный к нему треугольник с длинами сторон $a, b - a, c$ и углом 120° (см. рисунок).

Про этот дополнительный треугольник («родственный» исходному) мы уже все знаем. Осталось только применить разработанную выше теорию к дополнительному треугольнику с углом 120° , а затем распространить результат на исходный треугольник.

Упражнение 2. Докажите, что если a, b, c — длины сторон целочисленного треугольника с углом 60° , причем $b > a$, то найдутся такие натуральные m и n , что

$$a = n^2 - m^2, \quad b = n^2 + 2mn, \quad c = m^2 + mn + n^2.$$

При этом $n - m$ не делится на 3.

