ронам прямые $X'Y'$ и $U'V'$ (рис.2). Очевидно, что $\frac{A'X'}{X'B'}\cdot\frac{B'U'}{U'C'}\cdot\frac{C'Y'}{Y'D'}\cdot\frac{D'V'}{V'A'}=1$. Следовательно, $\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BU}{UC}\cdot\frac{CY}{YD}\cdot\frac{DV}{VA}=1$, и по теореме Менелая точки X, Y, U, V лежат в одной плоскости. Отсюда сразу следует утверждение задачи.

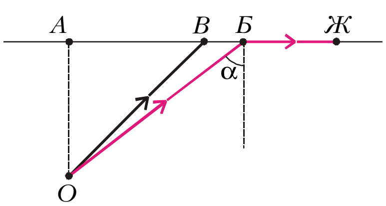
А.Заславский

Ф1823. *В поле, на расстоянии 1 км от прямой дороги, стоит и размышляет профессор Очков, большой знаток геометрической оптики. На расстоянии 2 км от ближайшей к профессору точки дороги А находится железнодорожная станция Ж. Скорость при ходьбе по полю равна 3 км/ч, по дороге – 4 км/ч. За какое минимальное время профессор может добраться до станции? А за какое время он смог бы добраться до середины отрезка АЖ?*

Профессору нужно решить – идти ли на станцию по полю вдоль прямой или дойти до какой-то точки дороги и дальше шагать по ней с большей скоростью, чем по полю. В зависимости от соотношения скоростей, при заданных положениях начальной и конечной точек пути может быть выгодным как первый, так и второй вариант.

Можно решить задачу «в лоб», обозначив буквой x расстояние от точки A до интересующей нас точки дороги, выразить через x время путешествия и взять от него производную. Минимум может достигаться в точках, где эта производная обращается в ноль, и на границах отрезка $АЖ$ – их обязательно нужно проверить.

Но тонкий намек на геометрическую оптику в условии задачи подсказывает нам удобную аналогию – ведь луч света всегда выбирает «самую лучшую» траекторию!



Пустим луч света так, чтобы он после «преломления» – выхода в среду с большей скоростью – попал в точку $Ж$ (см. рисунок). При этом угол «преломления» оказывается равным 90°, так что синус угла падения получается равным 0,75 (отношение скоростей – это «коэффициент преломления»). Обозначим нужную точку дороги буквой $Б$, тогда (поскольку $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}134$) $АБ$ = 1134 м и $БЖ$ = 866 м. При этом время движения составляет

$$t_1=\frac{ОБ}{v_1}+\frac{БЖ}{v_2}=\frac{1512\ \text{м}}{3000\ \text{м/ч}}+\frac{866\ \text{м}}{4000\ \text{м/ч}}=0{,}72\ \text{ч}.$$

А для путешествия в середину отрезка дороги (точку B) выгодно идти прямо по полю – эта точка находится «левее» точки $Б$. В этом случае

$$t_2=\frac{1414\ \text{м}}{3000\ \text{м/ч}}=0{,}47\ \text{ч}.$$

А.Очков

Ф1824. *На большой плоскости построена стена высотой 30 м. На расстоянии 30 м от стены на уровне земли расположена игрушечная пушка, а мишень установлена на расстоянии 80 м от пушки на прямой, перпендикулярной стене. При какой скорости снаряда возможно попадание?*

Можно решать эту задачу в общем виде, исследуя, например, уравнение траектории снаряда, брошенного под произвольным углом с неизвестной заранее скоростью. Но в данном случае намного проще получить решение прямо в числах.

Понятно, что вершина траектории находится на расстоянии 40 м от точки броска (по горизонтали). «Построим» еще одну стену высотой 30 м на расстоянии 80 м – 30 м = 50 м от точки броска. Ясно, что траектория, которая соответствует минимальной скорости выпущенного снаряда, почти касается верхних точек этих стен. Будем отсчитывать время от момента достижения верхней точки траектории. Тогда до второй стены снаряд долетит за время, которое в четыре раза меньше времени до падения (до стены по горизонтали 10 м, а до точки падения – 40 м). Движение по вертикали – свободное падение, поэтому за вчетверо меньшее время тело проходит по вертикали $1/16$ часть полной высоты. Это означает, что высота стены составляет $15/16$ от высоты траектории, и полная высота составит $H = 30\ \text{м}\cdot 16/15 = 32\ \text{м}$. Остальное совсем просто – время полета равно удвоенному времени падения с высоты H, т.е. $t = 2\sqrt{2H/g}$, и горизонтальная составляющая скорости равна

$$v_{\text{г}}=\frac{L}{t}=\frac{L}{2\sqrt{2H/g}}\approx 16\ \text{м/с}.$$

Вертикальная составляющая скорости при броске составляет

$$v_{\text{в}}=\sqrt{2gH}\approx 25\ \text{м/с}.$$

Таким образом, полная скорость снаряда при вылете равна примерно 30 м/с (считать все точнее без учета сопротивления воздуха просто не имеет смысла!).

А.Стрелков

Ф1825. *На гладком горизонтальном столе находится куб массой M = 2 кг, на его верхней грани лежит большой легкий лист бумаги, на нем – кубик массой m = 1 кг. Лист бумаги тянут с горизонтальной силой F = 15 Н. Коэффициент трения между бумагой и каждым из кубов $\mu = 0{,}7$. Найдите ускорения каждого из тел. А какими будут ускорения при силе F_1 = 10 Н?*

На лист бумаги действуют силы трения со стороны нижнего и верхнего кубов, причем суммарная сила трения не превышает значения $2\mu mg = 14$ Н. Это значит, что при действующей силе 15 Н лист бумаги движется с очень большим ускорением (его масса по условию мала), и оба тела проскальзывают относительно листа. Силы трения при этом максимальны, и ускорения кубов равны, соответственно,

$$a_1=\mu g=7\ \text{м/с}^2 \text{ и } a_2=\frac{\mu mg}{M}=3{,}5\ \text{м/с}^2.$$

При силе 10 Н по крайней мере один из кубов движется вместе с листом бумаги (а может быть, и оба). Если бы оба куба двигались вместе с листом бумаги (без проскальзывания), то их ускорение составило бы

$$a_3=\frac{F}{M+m}=3{,}3\ \text{м/с}^2.$$