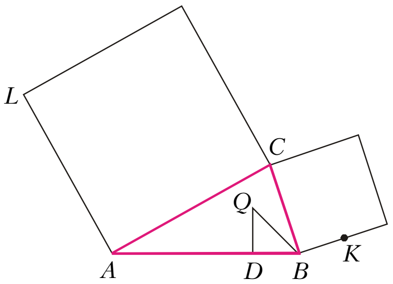

Рис. 9

Случай $\alpha-\beta=180^\circ$. В этом случае треугольник PLK вырождается в отрезок, и искомый полюс P лежит внутри отрезка LK и делит его в отношении $m : n$.

Задача 4. *На сторонах треугольника ABC построены квадраты (рис.9). Точка L – вершина одного квадрата, а точка K – середина стороны другого. Точка Q – вершина равнобедренного прямоугольного треугольника QDB, катеты которого $BD = DQ = (1/3)AB$. Докажите, что точки L, Q и K лежат на одной прямой и точка Q делит отрезок LK в отношении $2 : 1$.*

Решение. Здесь $\alpha=90^\circ$, $\beta=-90^\circ$, $m=1$, $n=1/2$. Поскольку в этой задаче $\alpha-\beta=180^\circ$ и $m/n=2$, то искомый полюс P лежит на отрезке LK и делит его в отношении $2 : 1$. Осталось только доказать, что полюс находится в точке Q, которая указана в условии задачи.

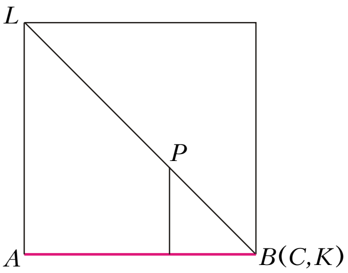

Рис. 10

Совместим точку C с точкой B (рис.10). Квадрат, построенный на стороне BC, вырождается в точку. Полюс P должен лежать на диагонали LB квадрата, построенного на стороне AB, и делить LB в отношении $2:1$, т.е. $PB = 0{,}5PL = (1/3)BL$. Отсюда $BD = (1/3)AB$, а точки P и Q совпадают.

Общий случай. Рассмотрим теперь решение конкретной задачи в общем случае, когда $\alpha\neq\beta$ и $m\neq n$.

Задача 5. *На сторонах AC и BC треугольника ABC построены прямоугольные треугольники CLA и BKC с острым углом 30° (рис.11). Точка Q делит отрезок AB в отношении $AQ:QB=3:1$. Докажите, что треугольник LQK прямоугольный.*

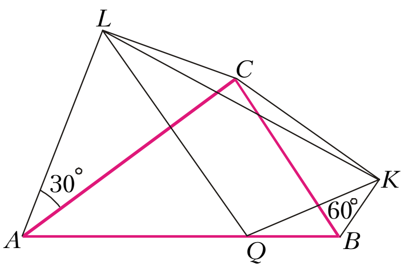

Рис. 11

Решение. Здесь мы имеем такие соотношения: $\alpha=30^\circ$, $\beta=-60^\circ$, $\alpha-\beta=90^\circ$, $m=AL/AC=\cos30^\circ=\sqrt{3}/2$, $n=BK/BC=\cos60^\circ=1/2$, $m/n=\sqrt{3}$. Найдем полюс P в этом случае. Совместим точку C с точкой B. При этом треугольник BKC выродится в точку, треугольник CLA займет положение, показанное на рисунке 12. В данном случае, поскольку $\alpha-\beta=90^\circ$ и $m/n=\sqrt{3}$, полюс P является вершиной прямого угла прямоугольного треугольника с гипотенузой BL и отношением катетов $PL:PK=m/n=\sqrt{3}$. Легко проверить, что точка Q, заданная в условии задачи, отвечает этим требованиям.

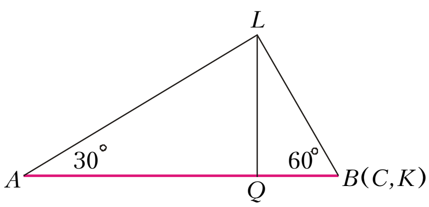

Рис. 12

Тем самым получается, что полюс P совпадает с точкой Q. Отсюда и следует, что треугольник LQK – прямоугольный.

В самом общем случае отыскание полюса P сводится к задаче нахождения точки пересечения двух окружностей (или двух дуг окружностей). Одна из них – множество точек, из которых отрезок KL виден под углом $\alpha-\beta$. Другая – множество точек, для которых отношение расстояний до двух данных точек K, L постоянно и равно m/n, это окружность Аполлония.

Теперь ясно, что возможны и другие специальные случаи, отличные от вышеприведенных трех. Например, при $m=n$ окружность Аполлония заменяется на серединный перпендикуляр отрезка KL, а при $\alpha-\beta=90^\circ$ полюс P лежит на окружности с диаметром KL. Из этих рассуждений ясно, что полюс существует всегда, за исключением единственного случая, когда $\alpha-\beta=0^\circ$ и $m=n$. Можно сказать, что здесь полюс «уходит в бесконечность».

В этом случае можно воспользоваться формулой (8), которая примет вид $\vec r_L=\vec r_K+\vec R$, или $\vec r_L-\vec r_K=\vec R$, что равносильно равенству $\overrightarrow{KL}=\vec R$ (в таком случае говорят, что отрезок KL движется поступательно). Последнее равенство означает, что вектор $\overrightarrow{KL}$ не зависит от положения точки C.

Задача 6. *На сторонах треугольника ABC построены прямоугольные треугольники CLA и CKB с острыми углами α и γ (рис.13). Докажите, что $KL=AB\cos\gamma$ и KL образует с прямой AB угол γ.*

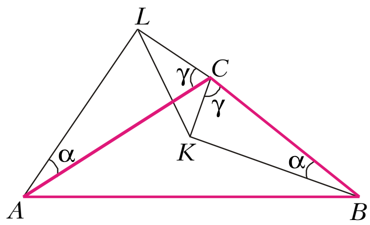

Рис. 13

Решение. В этой задаче $\alpha-\beta=0^\circ$, $m=n=\cos\alpha$, т.е. $\overrightarrow{KL}=\vec R$. В качестве определяющего положения точки C выберем такое, когда она совмещена с точкой B. Тогда и точка K совпадет с точкой B (треугольник BCK вырождается в точку). При этом $KL=AB\cos\gamma$ и образует с прямой AB угол γ, что и требовалось доказать (рис.14).

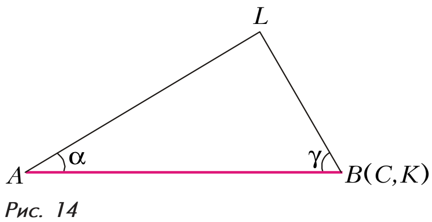

Рис. 14

Из разобранных задач ясно, что главный момент решения – нахождение полюса относительно заданного в условии треугольника. Более того, становится ясно, как составлять задачи такого рода. Можно взять треугольник, два «хороших» угла α и β (например такие, чтобы их разность была 0°, 90° или 180°), два удобных числа, найти при этих данных полюс. Затем указать три точки, соответствующие выбранным углам, числам и полюсу. И сформулировать задачу о взаимном положении полученных трех точек. Попробуйте!

(Напоминаем, что ориентация вершин треугольников и четырехугольников – против часовой стрелки.