Решения задач М1801–М1810, Ф1818–Ф1822

М1801. *Натуральное число n равно сумме некоторых трех различных натуральных делителей числа n − 1. Найдите все такие числа.*

Ответ: 13 и 31.

Пусть $n = x + y + z$, где x, y, z – натуральные делители числа $n - 1$, причем $x > y > z$.

Если x не превышает трети числа $n - 1$, то два других делителя менее трети числа $n - 1$ каждый, т.е. $x + y + z$ меньше $n - 1$ и тем более меньше n. Поэтому

$$x = \frac{n-1}{2}, \; n - x = \frac{n+1}{2} = y + z .$$

Рассуждая аналогично, получим, что $y = \frac{n-1}{3}$. Тогда $z = \frac{n+5}{6} > \frac{n-1}{6}$. Таким образом, возникают две возможности: $z = \frac{n-1}{4}$ и $z = \frac{n-1}{5}$. Решая уравнения

$$n = \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{3} + \frac{n-1}{4}$$

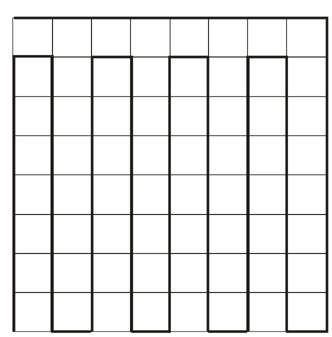
и

$$n = \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{3} + \frac{n-1}{5} ,$$

получим два значения: $n = 13$ и $n = 31$.

С.Токарев

М1802. *План секретного объекта представляет собой квадрат размером 8×8, который разбит коридорами на квадратики 1×1. В каждой вершине такого квадратика есть переключатель. Щелчок переключателя меняет освещенность сразу всех коридоров длины 1, выходящих из этой вершины (в освещенных коридорах свет выключается, а в неосвещенных – включается). Первоначально сторож находится в левом нижнем углу полностью неосвещенного объекта. Он может ходить только по освещенным коридорам и щелкать переключателями сколько угодно раз. а) Может ли сторож перебраться в верхний левый угол, погасив при этом свет во всех коридорах? б) Найдите все вершины квадратиков, в которые сторож сможет так перебраться.*



а) Сторож может пройти по пути, показанному на рисунке, щелкнув по одному разу по всем попавшимся на пути выключателям. При этом он побывает в каждом узле сетки ровно один раз и в каждом коридоре один раз включит свет и один раз – выключит. По окончании пути весь объект будет неосвещен.

б) Если раскрасить вершины в шахматном порядке, то сторож может перебраться в вершины того же цвета, что и левый нижний угол, и только в эти вершины. Почему?

Да потому что сторож может «пройти по диагонали», т.е. перебраться в единичном квадрате $ABCD$ из A в противоположную вершину C. Для этого достаточно пройти по пути $ABCDABC$, щелкая всеми встречающимися выключателями, кроме D. Умея «проходить по диагонали», сторож сможет пройти в любую вершину того же цвета, что и левый нижний угол.

И сторож не может перебраться в вершины другого цвета. Чтобы доказать это, докажем, что если сторожу удалось погасить весь свет, то он сделал четное число переходов по единичным коридорам. (Этого достаточно: так как каждый переход меняет цвет вершины, то после четного числа переходов цвет вернется к первоначальному.)

Будем считать, что каждый переключатель может находиться в положениях ВВЕРХ или ВНИЗ и что вначале все переключатели были ВНИЗ. Заметим, что на концах освещенного коридора положения переключателей различны. Сторож может выполнять элементарные действия двух видов: щелкать выключателем и переходить от выключателя к соседнему выключателю по освещенному коридору. После любого из таких действий он оказывается у противоположно направленного переключателя.

В полностью неосвещенном объекте все выключатели будут одинаково ориентированы: все ВВЕРХ или все ВНИЗ. Разберем оба случая. Если в конце все выключатели ВНИЗ, то сторож в сумме совершил четное число действий, так как начал и закончил у выключателя ВНИЗ. Поскольку он щелкнул каждым выключателем четное число раз, то общее число щелчков тоже четно. Значит, четно и число переходов.

Если же в конце все выключатели ВВЕРХ, то сторож сделал в сумме нечетное число действий. Но так как всего выключателей 81 (нечетное число!), причем каждым сторож щелкнул нечетное число раз, то общее число щелчков тоже нечетно. Значит, число переходов и в этом случае четно.

А.Шаповалов

М1803. *В квадрате $ABCD$ взяты точки P и Q такие, что $\angle PAQ = \angle QCP = 45^\circ$ (рис.1). Докажите, что суммарная площадь треугольников PAQ, PCB и QCD равна суммарной площади треугольников QCP, QAD и PAB.*

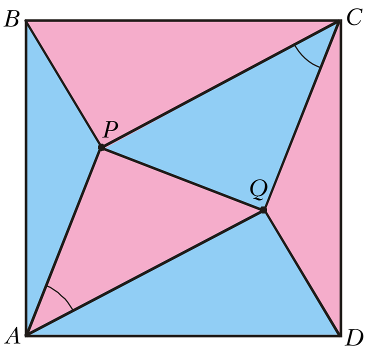


Рис.1

Симметрично отразим $\triangle APB$ относительно прямой AP, а $\triangle AQD$ – относительно прямой AQ. При этом отраженные точки B и D «склеятся» в одну точку M (рис.2). Значит, суммарная площадь треугольников QCP, QAD и PAB равна площади четырехугольника $APCQ$ плюс площадь треугольника PQM.

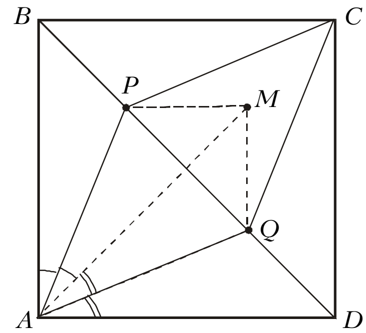


Рис.2

Симметрично отразим $\triangle CPB$ относительно прямой CP, а $\triangle CQD$ – относительно прямой CQ. При этом отраженные точки B и D «склеятся» в одну точку N. Значит, суммарная площадь треугольников PAQ, PCB и QCD равна площади четырехугольника $APCQ$ плюс площадь треугольника PQN.

Остается заметить, что площади треугольников PQM и PQN равны, поскольку сами треугольники равны.

В.Произволов

М1804. *Докажите, что*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1$$

для любых положительных чисел a, b и c.

Так как выражение в левой части однородно относительно a, b и c (т.е. $f(a,b,c) = f(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$), то мы можем считать, что $abc = 1$.

Из равенства $abc = 1$ следует, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{8abc}{a^3}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{a^3}}}.$$

Пусть

$$1+\frac{8}{a^3} = x,\ 1+\frac{8}{b^3} = y,\ 1+\frac{8}{c^3} = z,$$

тогда нужно доказать неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \ge 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz} \ge \sqrt{xyz} \Leftrightarrow xy+xz+yz+$$

$$+\ 2\sqrt{x^2yz}+2\sqrt{xy^2z}+2\sqrt{xyz^2} \ge xyz \Leftrightarrow xy+xz+yz+$$

$$+\ 2\sqrt{xyz}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right) \ge xyz. \quad (1)$$

Теперь, применив неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, находим

$$x = 1+\underbrace{\frac{1}{a^3}+\ldots+\frac{1}{a^3}}_{8\text{ раз}} \ge 9\sqrt[9]{1\cdot\left(\frac{1}{a^3}\right)^8} = \frac{9}{a^{8/3}},$$

поэтому $\sqrt{x} \ge \frac{3}{a^{4/3}}$. Аналогично,

$$\sqrt{y} \ge \frac{3}{b^{4/3}},\ \sqrt{z} \ge \frac{3}{c^{4/3}},$$

следовательно,

$$\sqrt{xyz} \ge \frac{27}{(abc)^{4/3}} = 27$$

и

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \ge 3\sqrt[3]{\sqrt{xyz}} \ge 3\sqrt[3]{27} = 9.$$

Поэтому для доказательства неравенства (1) достаточно показать, что

$$xy + xz + yz + 2\cdot 27\cdot 9 \ge xyz\,. \qquad (2)$$

Положим $\frac{8}{a^3} = A$, $\frac{8}{b^3} = B$, $\frac{8}{c^3} = C$, тогда (2) примет вид

$$(1+A)(1+B)+(1+A)(1+C)+$$
$$+\ (1+B)(1+C)+486 \ge (1+A)(1+B)(1+C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A+B+C+488 \ge ABC\,.$$

Но

$$A\cdot B\cdot C = \frac{8^3}{(abc)^3} = 8^3,$$

отсюда

$$A+B+C \ge 3\sqrt[3]{ABC} = 24\,,$$

и, значит,

$$A+B+C+488 \ge 512 = 8^3 = A\cdot B\cdot C\,.$$

Утверждение доказано.

М.Гарбер

М1805*. *В математической олимпиаде приняли участие двадцать один мальчик и двадцать одна девочка. Известно, что*
- *каждый из них решил не более шести задач;*
- *для каждого мальчика и каждой девочки найдется по крайней мере одна задача, которая была решена ими обоими.*

Докажите, что найдется задача, которую решили хотя бы три мальчика и три девочки.

Исключим из рассмотрения задачи, которые никто не решил. Обозначим через A множество задач, каждую из которых решили не более двух мальчиков, а через $\bar{A}$ – остальные задачи олимпиады, т.е. решенные не менее чем тремя мальчиками. Аналогично для девочек определим множества B и $\bar{B}$. Если бы некоторый мальчик решил задачи только из B, то не более 12 девочек решили бы общие с ним задачи (хотя бы по одной), что противоречит условиям задачи. Значит, каждый мальчик решил хотя бы одну задачу из $\bar{B}$ и, тем самым, не более пяти задач из B. Поэтому у каждого мальчика не более чем с 10 девочками общие задачи из B и, следовательно, не менее чем с 11 девочками общие задачи только из $\bar{B}$ (если у некоторой девочки общие с ним задачи как из B, так и из $\bar{B}$, то она в число этих 11 девочек не входит). Для всех мальчиков мы получили множество M из не менее $21\cdot 11$ пар «мальчик–девочка» с общими задачами только из $\bar{B}$. Точно так же рассматривая девочек, получаем множество N из не менее $21\cdot 11$ пар «девочка–мальчик» с общими задачами только из $\bar{A}$. Всего пар «мальчик–девочка» $21\cdot 21$, следовательно, какая-то пара «мальчик–девочка» входит как в M, так и в N, т.е. у них есть общая решенная задача, входящая в множества $\bar{B}$ и $\bar{A}$. Это означает, что найденную задачу решили по крайней мере 3 девочки и по крайней мере 3 мальчика. Утверждение доказано.

С.Спиридонов

М1806. *Таблица чисел размером $n\times n$ такова, что любые n чисел, указанные по одному в каждой строке и в каждом столбце, дают всегда одинаковую сумму. В каждой строке таблицы определяется минимальное число, среди этих n чисел выделяется максимальное число M. В каждом столбце таблицы определяется максимальное число, среди них выделяется минимальное число m. Докажите, что $M = m$.*

Обозначим таблицу, оговоренную условием задачи, через A. Составим таблицу B, у которой все n строк будут одинаковыми и такими, какая первая строка у таблицы A. Затем, вычтя из таблицы A таблицу B, получим новую таблицу C, у которой в каждой строке будут стоять одинаковые числа (например, в первой – только нули), т.е. у таблицы C одинаковыми будут все столбцы. Таким образом, таблица A представлена как сумма двух специальных таблиц: $A = B + C$ (чуть подробнее об этом рассказано в решении задачи М1760 в «Кванте» №4 за 2001 г.).

К примеру,

$$\begin{pmatrix}1, & 2, & 3\\ 4, & 5, & 6\\ 7, & 8, & 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & 2, & 3\\ 1, & 2, & 3\\ 1, & 2, & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0, & 0, & 0\\ 3, & 3, & 3\\ 6, & 6, & 6\end{pmatrix}.$$

Теперь легко сообразить, что M равно сумме минимального числа из таблицы B и максимального числа из таблицы C. Точно так же число m, в силу его определения, равно сумме максимального числа из таблицы C и минимального числа из таблицы B, т.е. $M = m$.

Сформулируем дополнительное утверждение. В каждой строке таблицы A выберем максимальное число, среди этих n чисел выберем минимальное число μ. Можно доказать (по той же схеме), что $M+\mu$ *равно сумме максимального и минимального чисел из таблицы A.*

В.Произволов

М1807. *При каких n можно разрезать треугольник на n выпуклых многоугольников с различным числом сторон?*

Основой решения является следующее утверждение: нельзя разрезать плоскость на 5 областей, из которых любые две имели бы общую границу (не точечную). Для его доказательства достаточно заметить, что если 4 области попарно граничат, то одна из них лежит в «кольце», образованном тремя остальными, как на рисунке 1, и, следовательно, пятая область не может граничить со всеми четырьмя.

Пусть k – наибольшее из чисел сторон многоугольников разбиения. Так как соответствующий многоугольник выпуклый, к границе треугольника примыкает не более трех его сторон. В силу выпуклости остальных $n-1$ многоугольников каждый из них граничит не более чем с одной стороной k-угольника. Следовательно, $k \le n + 2$, и, значит, есть единственная возможность: тре-

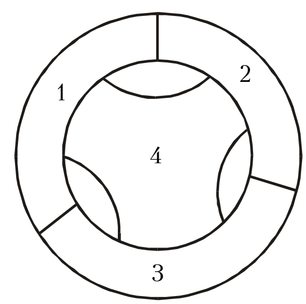


Рис.1

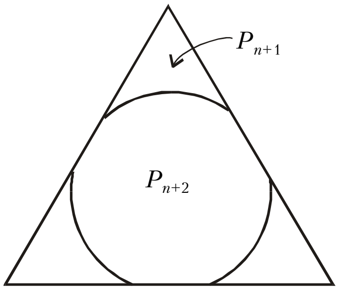


Рис.2

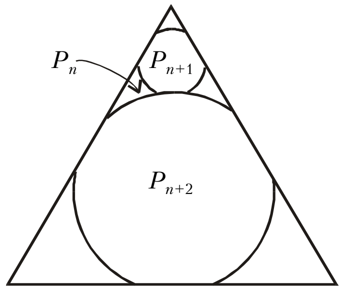


Рис.3

угольник разрезан на n многоугольников с числом сторон от 3 до $n + 2$.

Так как $(n + 2)$-угольник граничит с тремя сторонами исходного треугольника, $(n + 1)$-угольник может граничить только с двумя из них (рис.2). Следовательно, он должен граничить со всеми остальными многоугольниками. Аналогично, n-угольник может граничить лишь с одной стороной исходного треугольника (рис.3) и, значит, граничит со всеми остальными многоугольниками. Поэтому $(n - 1)$-угольник граничит либо со всеми многоугольниками, либо с какой-то стороной исходного треугольника.

Таким образом, при $n > 4$ существует 5 областей, из которых любые две имеют общую границу: это либо 5 многоугольников с наибольшим числом сторон, либо 4 многоугольника с наибольшим числом сторон и внешняя по отношению к исходному треугольнику область. Поскольку такие 5 областей существовать не могут, при $n > 4$ искомое разрезание невозможно. Пример разрезания с $n = 4$ приведен на рисунке 4. Аналогично строятся примеры для $n = 2$ или 3.

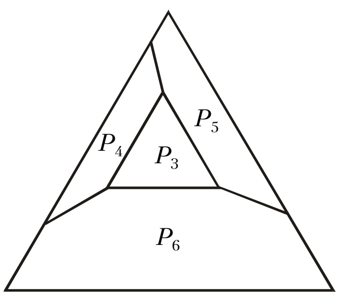


Рис.4

А.Заславский

М1808. *Решите в натуральных числах следующие уравнения:*

а) $x! + y! = z!!$;

б) $(x!)(y!) = z!!$

($z!!$ – произведение всех натуральных чисел, не превосходящих числа z и имеющих с ним одинаковую четность).

Всюду ниже $x \le y$.

а) Если число z нечетно, то $x = 1$ и $y = 2$ (при $y > 2$ числа $y!$ и $z!!$ делились бы на 3). Значит, либо $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, либо $z = 2m$. Очевидно, $(2m)!! = 2^m(m!)$.

Первый случай: $m \ge x$.

Перепишем наше уравнение в виде

$$1 + \frac{y!}{x!} = 2^m\left(\frac{m!}{x!}\right).$$

Очевидно, $\frac{y!}{x!}$ равно 1 либо $x + 1$ (число $(x+1)(x+2)\dots$ было бы четно). В первом случае $m = x = 1$, что дает решение $(1, 1, 2)$. Во втором случае $m = x$ (при $m > x$ число $x + 1$ было бы делителем 1). Следовательно, $y = m + 1$, и

$$m + 2 = 2^m. \qquad (*)$$

Второй случай: $m < x$.

Перепишем наше уравнение в виде

$$\frac{x!}{m!} + \frac{y!}{m!} = 2^m.$$

Имеем: $x = m + 1$, поскольку числа $m + 1$ и $m + 2$ не могут одновременно быть степенями двойки. Далее, $y = m + 1$ либо $y = m + 2$. Действительно, при $y \ge m + 3$ нечетное число $1 + (m+2)(m+3)\dots$ было бы степенью 2.

Получили: либо $2(m+1) = 2^m$, т.е.

$$m + 1 = 2^{m-1}, \qquad (**)$$

либо $(m+1) + (m+1)(m+2) = 2^m$, т.е. $(m+1)(m+3) = 2^m$. В этом случае $m + 1 = 2^\alpha$, $m + 3 = 2^\beta$, следовательно, $2^\beta - 2^\alpha = 2$, $2^\alpha\left(2^{\beta-\alpha} - 1\right) = 2$, $\alpha = 1$, $m = 1$. Но

$$(m+1)(m+3) = 8 \ne 2 = 2^m.$$

Таким образом, уравнение задачи свелось к $(*)$ и $(**)$. Рассмотрим уравнение $2^t = t + 2$. Функция $f(t) = 2^t - t - a$ при любом a имеет не более двух корней, поскольку $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 - 1$ имеет единственный корень ($t = \log_2 \log_2 e$). При $a = 2$ один из корней отрицателен, поскольку $f(0) = -1$ и $f(t) \to +\infty$ при $t \to -\infty$. Положительный корень очевиден: $t = 2$.

Таким образом, $(*)$ дает $m = 2$, т.е. решение $(2, 3, 4)$. Уравнение $(**)$ дает $m = 3$, т.е. решение $(4, 4, 6)$.

Ответ: $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 3)$, $(1, 1, 2)$, $(2, 3, 4)$, $(3, 2, 4)$, $(4, 4, 6)$.

б) Если $x > 1$ либо $y > 1$, то z четно. Таким образом, либо $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, либо $z = 2m$ и $z!! = 2^m(m!)$.

Лемма. *Число $m!$ не делится на 2^m (m – натуральное число).*

(Доказательство леммы приведем ниже.)

Докажем теперь, что $y > m$. Пусть $x \le m$. Тогда $y! = 2^m \cdot \frac{m!}{x!}$. Отсюда вследствие леммы $y > m$.

Имеем: $x!\left((m+1)\dots y\right) = 2^m$. В правой, а значит, и в левой части этого равенства нет отличных от 1 нечетных множителей. Следовательно, $y = m + 1$, а x равен 1 либо 2. В первом случае $m + 1 = 2^m$, во втором $m + 1 = 2^{m-1}$.

Уравнение $2^t = t + 1$ имеет ровно 2 корня: $t = 0$ и $t = 1$, а уравнение $2^{t-1} = t + 1$ – корень $t = 3$ и второй корень, меньший 1 (см. пункт *а*)). Случай $t = 1$ дает решение $(1, 2, 2)$, а случай $t = 3$ – решение $(2, 4, 6)$.

Ответ: $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 4, 6)$, $(4, 2, 6)$.

Доказательство леммы.

Пусть α – степень, в которой 2 входит в разложение числа $n!$ на простые множители. Среди чисел 1, 2, 3, … …, n имеется $\left[\frac{n}{2}\right]$ чисел, кратных 2, из них $\left[\frac{n}{4}\right]$ чисел, кратных 4, и т.д. Поэтому

$$\alpha = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \dots + \left[\frac{n}{2^k}\right] + \dots$$

(очевидно, в этой сумме конечное число отличных от нуля слагаемых).

Используя очевидное неравенство $[t] \le t$ для любого вещественного числа t, получаем

$$\alpha = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{2^k}\right] + \ldots <$$

$$< \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \ldots + \frac{n}{2^k} + \ldots = n .$$

Лемма доказана.

В.Сендеров

M1809*. *Пользуясь одной линейкой, найдите центры а) двух пересекающихся окружностей; б) двух касающихся (внешним или внутренним образом) окружностей; в) двух концентрических окружностей.*

Воспользуемся известной теоремой: если из точки вне окружности проведены к окружности две касательные и две секущие и если точки пересечения секущих с окружностью рассматриваются как вершины выпуклого четырехугольника, то точка пересечения диагоналей этого четырехугольника принадлежит прямой, проходящей через точки касания указанных касательных с окружностью, а две противоположные стороны четырехугольника или параллельны, или точка пересечения их продолжений лежит на той же прямой.

Доказательство теоремы можно найти, например, в книге И.Ф.Шарыгина «Задачи по геометрии: планиметрия» (серия «Библиотечка «Квант», вып. 17; задача II.271).

Эта теорема позволяет выполнить следующее построение.

Построение 1. *Из точки вне окружности провести к окружности касательные.*

Проведем из точки A к окружности три произвольные секущие, которые пересекут окружность в точках B и C, D и E, F и G (рис.1). Прямые BE и DC пересекаются в точке K, а прямые DG и FE – в точке L. Прямая KL пересечет окружность в точках M и N. Прямые AM и AN – искомые касательные.

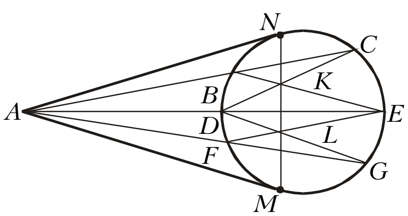


Рис.1

Устремляя угол между секущими к нулю, из теоремы получим следствие: если из точки вне окружности проведены к окружности две касательные и секущая, то на прямой, проходящей через точки касания касательных с окружностью, пересекаются (если они не параллельны) две другие касательные к окружности, проведенные через точки пересечения окружности с секущей.

С помощью этого следствия нетрудно доказать еще одну теорему: пять указанных ниже прямых, если они не параллельны, пересекаются в одной точке: две касательные к окружности, проведенные через точки ее пересечения с диагональю описанного около окружности четырехугольника, продолжение второй диагонали четырехугольника и две прямые, каждая из которых проходит через две расположенные по одну сторону от второй диагонали точки касания окружности со сторонами четырехугольника.

Пусть четырехугольник $ABCD$ описан около окружности, K, L, M, N – точки касания его сторон с окружностью, и пусть прямые KL и MN пересекаются в точке P (рис.2).

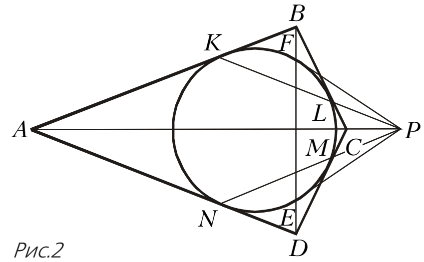


Рис.2

Из точки P проведем к окружности касательные PE и PF (E и F – точки касания). Согласно указанному выше следствию, прямые AB и BC, AD и CD пересекаются на прямой EF. Но эти прямые пересекаются на диагонали BD. Следовательно, точки E и F лежат на диагонали BD.

Остается доказать, что продолжение диагонали AC проходит через точку P.

Пусть прямая KL пересекает прямую AC в точке P', а прямая NM пересекает AC в точке P''.

Из треугольника ABC, по теореме Менелая, получим

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CP'}{P'A} = -1 .$$

Точно так же из треугольника ADC

$$\frac{AN}{ND} \cdot \frac{DM}{MC} \cdot \frac{CP''}{P''A} = -1 ,$$

откуда

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CP'}{P'A} = \frac{AN}{ND} \cdot \frac{DM}{MC} \cdot \frac{CP''}{P''A} .$$

Учитывая равенство длин касательных, проведенных к окружности из одной точки, $\frac{CP'}{P'A} = \frac{CP''}{P''A}$, т.е. точки P' и P'' совпадают, или, что то же самое, прямая AC проходит через точку пересечения прямых KL и NM.

Теорема обосновывает такое построение.

Построение 2. *Провести касательную к окружности через заданную на окружности точку.*

Пусть на окружности задана точка E (см. рис.2). Через эту точку проведем произвольную секущую (но заведомо не через центр окружности), которая пересечет окружность в точке F. Возьмем на прямой EF по разные стороны от окружности произвольные точки B и D и из них проведем к окружности касательные (построение 1). Пусть соответствующие точки пересечения касательных – A и C, а точки касания – K, L, M, N. Прямые KL, NM и AC пересекаются в точке P, а прямые PE и PF касаются окружности.

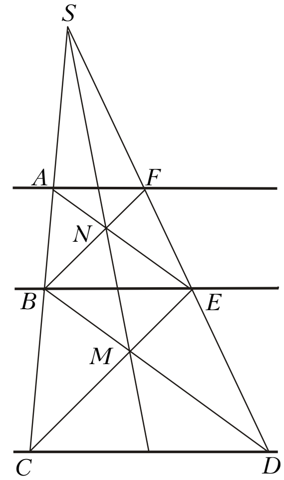


Рис.3

Понадобятся еще два вспомогательных построения, доказательства которых почти очевидны, а потому опускаются.

Построение 3. Через точку A провести прямую, параллель-

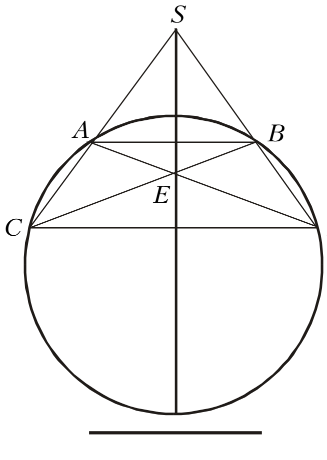


Рис.4

ную двум данным на плоскости параллельным прямым.

Через точку A проведем прямую, пересекающую параллельные прямые в точках B и C (рис.3). Взяв на прямой AB произвольную точку S, проведем через эту точку еще одну прямую, которая пересечет те же параллельные прямые в точках E и D. Пусть M – точка пересечения прямых BD и CE, N – точка пересечения прямых SM и AE, F – точка пересечения прямых BN и SD. Тогда AF – искомая прямая.

Построение 4. Найти диаметр окружности, перпендикулярный двум параллельным прямым, лежащим в плоскости окружности.

Возьмем на окружности точки A и C (рис.4) и построим хорды AB и CD, параллельные заданным прямым (построение 3). Для удобства построения точки A и C выбираются так, чтобы хорды AB и CD были заведомо не равны.

Если E – точка пересечения прямых AD и BC, S – точка пересечения прямых CA и DB, то искомый диаметр лежит на прямой SE.

Теперь решим задачу а).

Пусть окружности пересекаются в точках A и B (рис.5), причем сначала рассмотрим случай, когда отрезок AB не совпадает с диаметром одной из окружностей. В этих точках проведем к окружностям касательные (построение 2). Если C – точка пересечения касательных к одной окружности, а D – точка пересечения касательных к другой окружности, то прямая CD, в силу симметрии, проходит через центры окружностей.

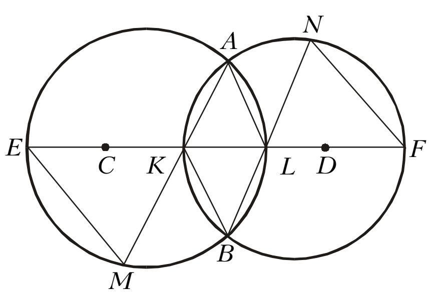


Рис.5

На рисунке 5 EL и KF – диаметры окружностей. Если построить другие диаметры этих окружностей, то задача будет решена.

Проведем прямые AK и BL до пересечения с окружностями в точках M и N, а затем проведем прямые EM и FN. $\angle LEM = \angle MAL$, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. Точно так же $\angle KFN = \angle KBN$. Но, учитывая симметрию, $\angle MAL = \angle KBN$, поэтому $\angle LEM = \angle KFN$, значит, прямые EM и FN параллельны.

Теперь, пользуясь построением 4, найдем диаметры окружностей, перпендикулярные прямым EM и FN.

Если точки пересечения окружностей очень близки к концам одного диаметра меньшей окружности (или, возможно, совпадают с концами диаметра, но это не известно заранее), так что получить точку пересечения касательных к меньшей окружности не удастся, можно воспользоваться точками пересечения касательных к меньшей окружности с большей окружностью – если рассматривать эти точки как вершины трапеции (или прямоугольника), то точка пересечения диагоналей такой трапеции (прямоугольника) и точка пересечения касательных к большей окружности находятся на прямой, проходящей через центры окружностей.

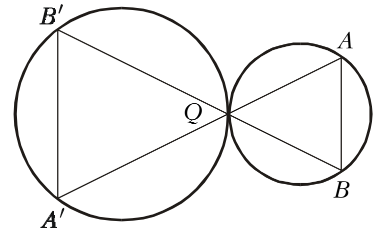


Рис.6

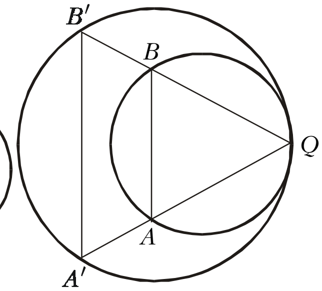


Рис.7

Если известно, что точки пересечения окружностей совпадают с концами диаметра меньшей окружности, или известно, что окружности равны, то построения значительно упрощаются (рассмотрите эти случаи).

б) Пусть окружности касаются в точке Q (рис.6 и 7). Проведем через эту точку две прямые, пересекающие окружности в точках A и B, A' и B' соответственно.

Учитывая гомотетию с центром в точке Q, прямые AB и $A'B'$ параллельны, поэтому, пользуясь построением 4, найдем диаметры окружностей, перпендикулярные этим прямым.

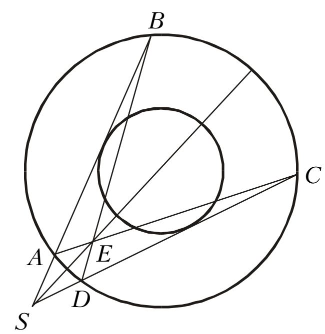


Рис.8

Проведя через точку Q другие прямые, найдем другие диаметры.

в) Взяв вне окружностей произвольную точку S, проведем касательные к меньшей окружности, которые пересекут большую окружность в точках A, B, C, D (рис.8).

Если E – точка пересечения прямых AC и BD, то прямая SE проходит через центр окружностей.

Так же найдем еще одну прямую, проходящую через центр.

В заключение стоит отметить, что если на чертеже нет других фигур, кроме одной окружности, то найти ее центр с помощью только линейки нельзя. Но если окружность задана вместе с центром, то с помощью одной линейки можно, как известно из геометрии, проводить всевозможные построения.

И.Вайнштейн

М1810*. *В каждой вершине выпуклого многогранника сходится четное число ребер. Одна грань многогранника красная, остальные – синие. Периметр каждой синей грани равен целому числу. Докажите, что периметр красной грани равен целому числу.*

Доказательству этого факта предпошлем две леммы.

Лемма 1. *Выпуклый многогранник, в каждой вершине* *которого сходится четное число ребер, можно правильно окрасить в черный и белый цвета. При этом окраска считается правильной, если каждые две грани, имеющие общее ребро, окрашены в разные цвета.* [1]

Докажем эту лемму. Многогранник представляет собой карту, где странами в исходный момент являются его грани. Будем ходить по границам и вершинам этой карты. При этом, пройдя границу и оказавшись в некоторой вершине, мы пойдем дальше по любой другой границе, исходящей из этой вершины. Будем идти до тех пор, пока не попадем в вершину, в которой мы уже были, например в вершину A. Участок пути между выходом из вершины A и возвращением в нее представляет собой замкнутый несамопересекающийся контур; снимем его с карты. Тогда получим на поверхности многогранника несколько иную карту. При этом кратность каждой вершины либо не изменится (если контур не проходит через нее), либо уменьшится на 2, т.е. по-прежнему останется четной. Поэтому во вновь получившейся карте мы снова можем выделить некоторый несамопересекающийся замкнутый контур, который мы опять снимем. Продолжим этот процесс до тех пор, пока не исчерпаем всю карту (при этом процессе вершины многогранника постепенно перестают быть вершинами карты). Итак, исходная карта, все вершины которой имеют четную кратность, может быть получена последовательным наложением на поверхность многогранника контуров, каждый из которых разбивает ее на две части. При очередном наложении все страны в одной части сохраняют свои цвета, а в другой – цвет каждой страны меняется на противоположный.

Лемма 2. *Если грани выпуклого многогранника правильно окрашены в черный и белый цвета, то сумма периметров черных граней равна сумме периметров белых граней.*

Справедливость этого утверждения сразу следует из того, что каждое ребро многогранника принадлежит одновременно как черной, так и белой его граням.

Теперь обратим взоры на многогранник, оговоренный условием задачи, и обозначим его через M. Согласно лемме 1, многогранник M можно правильно перекрасить в черный и белый цвета (не забывая при этом первоначальные цвета его граней).

Пусть оказалось, что все черные грани до того были синими, тогда суммарный периметр черных граней равен целому числу K. Суммарный периметр белых граней тоже K (лемма 2). При этом белые грани, которые были синими, имеют целочисленный суммарный периметр. Значит, белая грань, которая была красной, имеет периметр, равный целому числу.

В.Произволов

Ф1818. *На плоскости нарисован большой квадрат АБВГ со стороной d. За какое минимальное время точка может проехать по пути АБВГА, если ее максимальное ускорение по величине не может превышать a?*

При прохождении любого угла скорость точки должна падать до нуля – иначе ускорение при повороте станет бесконечно большим. Минимальное время прохождения отрезка d при нулевой начальной и нулевой конечной скоростях получится в том случае, если половину пути точка ускоряется с максимально возможным ускорением a, а половину пути замедляется с тем же по величине ускорением. Это время τ найдем из условия

$$\frac{1}{2}a\left(\frac{\tau}{2}\right)^2=\frac{d}{2}.$$

Тогда полное время будет равно

$$T=4\tau=8\sqrt{\frac{d}{a}}.$$

Однако в задаче не было явно сказано, что скорости точки при входе в квадрат и при выходе из него (там поворачивать не нужно!) равны нулю. В этом случае время τ_1 можно найти из условия

$$\frac{1}{2}a\left(\frac{\tau_1}{2}\right)^2=d,$$

и полное время движения точки будет равно

$$T_1=2\tau_1+2\tau=\left(4+2\sqrt{2}\right)\sqrt{\frac{d}{a}}<T.$$

З.Рафаилов

Ф1819. *Тело массой $M = 10$ кг подвешено в лифте при помощи трех одинаковых легких веревок, натянутых вертикально. Одна из них привязана к потолку лифта, две другие – к полу. Веревки натянуты так, что в покое натяжение каждой из нижних составляет $F_0 = 5$ Н. Найдите силу натяжения верхней веревки при ускорении лифта, равном $a_1 = 1$ м/с^2 и направленном вверх. То же – при величине ускорения лифта $a_2 = 2$ м/с^2. Ускорение свободного падения принять равным $g = 9{,}8$ м/с^2.*

Когда груз вместе с лифтом движется с направленным вверх ускорением a, то веревка сверху немного растягивается (ее натяжение F должно увеличиться), а нижние веревки на столько же укорачиваются – если еще остаются натянутыми. Обозначим жесткость одной веревки k и растяжение верхней веревки x. В состоянии покоя

$$F-Mg-2F_0=0.$$

При движении вверх с ускорением a

$$(F+kx)-Mg-(2F_0-2kx)=Ma.$$

Отсюда

$$kx=\frac{Ma}{3}.$$

Для $a_1=1$ м/с^2 натяжение верхней веревки равно

$$F_1=F+kx=Mg+2F_0+\frac{Ma_1}{3}=$$

$$=98\ \text{Н}+10\ \text{Н}+3{,}3\ \text{Н}\approx 111\ \text{Н}.$$

Натяжение каждой из нижних веревок при этом составляет $F_0-Ma_1/3\approx 1{,}7$ Н – они в этом случае натянуты. Для второго случая $a_2=2$ м/с^2 нижние веревки уже

---

[1] *Формулировка задачи несколько изменена, ибо первоначальная формулировка пока не получила своего решения.*

не натянуты, тогда натяжение верхней веревки равно $F_2 = Mg + Ma_2 = 98$ Н $+ 20$ Н $= 118$ Н.

А.Веревкин

Ф1820. *Толстостенная капиллярная трубка из стекла с внутренним диаметром 0,5 мм, внешним диаметром 5 мм и длиной 6 см наполовину погружена в вертикальном положении в большой сосуд с водой. С какой силой нужно удерживать трубку, чтобы она не утонула? Плотность стекла вдвое больше плотности воды. Считать, что стекло полностью смачивается водой, коэффициент поверхностного натяжения воды 0,07 Н/м.*

Для расчета необходимой силы F нужно учесть, что на стеклянную трубку вниз действуют сила тяжести трубки и силы сцепления со стороны воды на внутренней и на внешней окружностях трубки, а вверх действует сила Архимеда. Сила тяжести трубки равна

$$Mg = \rho_{\text{ст}}\pi\left(R^2 - r^2\right)Hg \approx 9{,}3\cdot 10^{-2}\ \text{Н}.$$

Сила Архимеда, действующая со стороны воды на погруженную часть трубки, равна

$$F_{\text{А}} = \rho_{\text{в}}\pi\left(R^2 - r^2\right)\frac{H}{2}g = \frac{Mg}{4} \approx 2{,}3\cdot 10^{-2}\ \text{Н}.$$

Высота подъема воды в таком капилляре может достигать величины

$$h = \frac{2\sigma}{\rho_{\text{в}}gr} = 0{,}056\ \text{м} = 5{,}6\ \text{см},$$

что больше половины длины трубки (части ее над водой). В этом случае трубка заполнена водой целиком, и сила сцепления водяного столба высотой $H/2$ с внутренней поверхностью трубки радиусом r равна его весу:

$$F_1 = \rho_{\text{в}}\pi r^2\frac{H}{2}g \approx 2{,}4\cdot 10^{-4}\ \text{Н}.$$

Сила сцепления со стороны наружной воды (смачивание полное) равна

$$F_2 = 2\pi R\sigma \approx 2{,}2\cdot 10^{-3}\text{Н}.$$

Искомая сила составляет

$$F = Mg + F_1 + F_2 - F_{\text{А}} \approx 7{,}2\cdot 10^{-2}\ \text{Н}.$$

Р.Александров

Ф1821. *Плоский конденсатор емкостью С с воздушным диэлектриком состоит из двух больших пластин, расположенных очень близко друг к другу. Одна из пластин не заряжена, другая несет заряд Q. Соединим пластины проводником, имеющим большое сопротивление R. Оцените количество теплоты, которое выделится в проводнике за большое время.*

Заряды с одной пластины на другую будут перетекать, пока потенциалы пластин не сравняются. Равенство потенциалов наступит, когда перетечет заряд $Q/2$. При этом поле в пространстве между пластинами исчезнет, а поле снаружи не изменится. Следовательно, в виде тепла выделится энергия поля, которое существовало в пространстве между пластинами до перетекания заряда. Это поле создавалось пластиной с зарядом Q; но точно такое же поле будет у нашего конденсатора, если его пластины получат заряды $+Q/2$ и $-Q/2$. Энергия конденсатора в этом случае составит

$$W = \frac{(Q/2)^2}{2C} = \frac{Q^2}{8C}.$$

Это и есть ответ. (Заметим, что в ответ не вошло значение R. При достаточно больших R от него и в самом деле ничего не зависит – как и в обычной задаче про разряд конденсатора через резистор. Если же R не очень велико, то в процессе разряда через резистор текут значительные токи, возникшее электромагнитное поле уносит заметную часть энергии, и эта часть также перейдет в тепло, но не в резисторе.) Кстати, расчет «в лоб» – запись уравнения для изменения заряда со временем, его решение и интегрирование порций тепла – дает тот же ответ.

А.Повторов

Ф1822. *К источнику переменного напряжения подключены последовательно амперметр и два «черных ящика», в каждом из которых может находиться резистор, конденсатор или катушка индуктивности. Переключили «ящики» из последовательного соединения в параллельное – показание амперметра осталось прежним. Начнем теперь изменять частоту источника – показания амперметра при этом будут вначале уменьшаться, а потом увеличиваться. Во сколько раз нужно изменить частоту, чтобы показания амперметра вернулись к первоначальному значению? Элементы внутри ящиков считайте идеальными.*

При переключении «ящиков» с последовательного соединения на параллельное полное сопротивление цепи не изменилось – это возможно только в том случае, если в одном «ящике» находится катушка, а в другом конденсатор. Обозначим индуктивность катушки L, емкость конденсатора C, частоту генератора (до изменения) ω. При последовательном включении

$$U = I\omega L - \frac{I}{\omega C}, \quad \text{и} \quad I = \left|\frac{U}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}\right|.$$

Аналогично, при параллельном включении

$$I = \left|\frac{U}{\omega L} - U\omega C\right|.$$

Отсюда сразу получаем

$$\frac{1}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} = \omega C - \frac{1}{\omega L}, \text{ или } \omega^2 LC + \frac{1}{\omega^2 LC} = 3.$$

Обозначив $\omega^2 LC = x$, получим уравнение

$$x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Отношение частот генератора равно отношению корней этого уравнения:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} \approx 2{,}62.$$

Вот во столько раз и нужно изменить частоту генератора. А уменьшить ее или увеличить, зависит от того, выше или ниже резонансной была начальная частота.

А.Зильберман