Самосовмещения

На рисунке 1 слева все буквы латинского алфавита выписаны в пять строк. Справа по тому же правилу выписаны буквы русского алфавита. Что же это за правило?

AMTUVWY	АДЛМПТШ
BCDEK	ВЕЗКСЭЮ
HIOX	ЖНОФХ
NSZ	И
FGJLPQR	БГЁЙРУЦЧЩЪЫЬЯ

Рис. 1

Буквы первой строки имеют вертикальную ось симметрии. Второй – горизонтальную. Третьей – и вертикальную, и горизонтальную оси симметрии, а также центр симметрии. Буквы четвертой строки имеют только центр симметрии. Наконец, буквы последней строки не имеют ни осей, ни центров симметрии.

Впрочем, классификация букв по тому, какими симметриями они обладают, вряд ли интересна для филолога. А вот геометр привык к такой классификации выпуклых четырехугольников. Скорее всего, вы знакомы с ней. Напомню ее, указав в каждом случае группу самосовмещений фигуры: неправильный четырехугольник (рис.2, $\{id\}$); паралле-

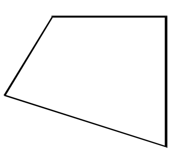

Рис. 2

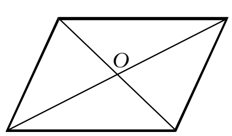

Рис. 3

лограмм[1] (рис.3, $\{id, R_O^{180^\circ}\}$); дельтоид (рис.4, $\{id, S_{AC}\}$); равнобокая трапеция (рис.5, $\{id, S_n\}$); прямоугольник[2] (рис. 6, $\{id, R_O^{180^\circ}, S_n, S_m\}$); ромб (рис.7, $\{id, R_O^{180^\circ}, S_{AC}, S_{BD}\}$); квадрат (рис. 8, $\{id, R_O^{90^\circ}, R_O^{180^\circ}, R_O^{270^\circ},$

[1] Не являющийся ромбом!

[2] Не являющийся квадратом!

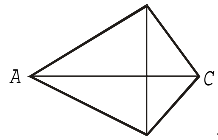

Рис. 4

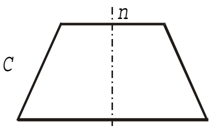

Рис. 5

$S_{AC}, S_{BD}, S_n, S_m\}$). Здесь использованы общепринятые обозначения: id – тождественное отобра-

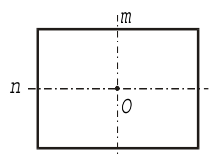

Рис. 6

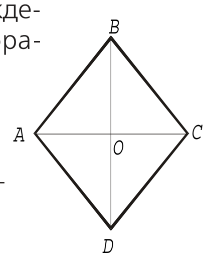

Рис. 7

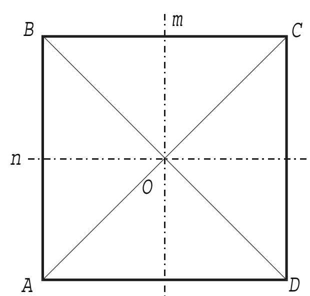

Рис. 8

жение, т.е. отображение, которое оставляет все точки фигуры на месте; R_O^φ – поворот вокруг точки O на угол φ против часовой стрелки; S_n – симметрия относительно прямой n.

Треугольники тоже классифицируют в зависимости от того, какова группа самосовмещений: неправильный треугольник (рис.9, $\{id\}$); равнобедренный неравносторонний треугольник (рис.10, $\{id, S_n\}$); рав-

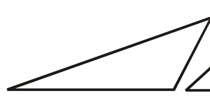

Рис. 9

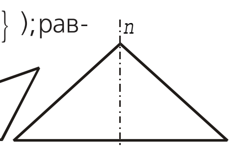

Рис. 10

носторонний треугольник (рис.11, $\{id, R_O^{120^\circ}, R_O^{240^\circ}, S_a, S_b, S_c\}$).

Впрочем, я забыл сказать, что такое самосовмещение. Это отображение, сохраняющее расстояния. Точнее говоря, для любых

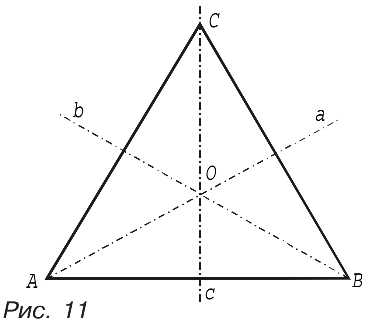

Рис. 11

двух точек X и Y фигуры расстояние между их образами X' и Y' должно быть равно расстоянию между исходными точками:

$$X'Y' = XY .$$

Разумеется, вершины многоугольника при самосовмещении переходят в вершины, так что можно следить только за перестановкой вершин.

Задачи

1. Сколько осей симметрии имеет правильный n-угольник?

2. 11 точек расположены на плоскости симметрично относительно прямых n и m. Обязана ли одна из этих точек быть точкой пересечения прямых n и m?

3. Придумайте фигуру, которая выдерживает поворот на 90°, но не имеет ни одной оси симметрии.

Ответы и указания к этим и следующим задачам вы найдете в конце журнала.

Перейдем от плоскости к пространству. Повернем куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вокруг прямой AC_1 на 120°, как показано на рисунке 12. Тогда точка B перейдет в точку A_1, которая перейдет в D, которая, в свою очередь, перейдет в B. Аналогично, $B_1 \to D_1 \to C \to B_1$. Значит, прямая AC_1 – ось вращения куба.

Прямые BD_1, CA_1 и DB_1 тоже являются его осями вращения: поворот вокруг любой из них на 120° переводит куб в себя.

Есть у куба и оси симметрии. Например, прямая, проходящая через середины противоположных ребер AD и B_1C_1.

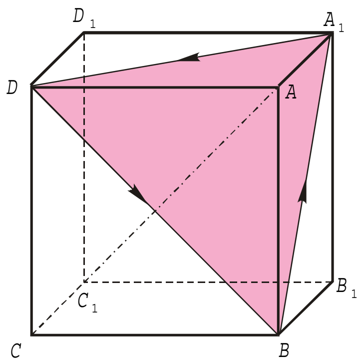

Рис. 12

Задача 4. Сколько осей симметрии имеет куб?

Рассмотрим теперь правильный тетраэдр *ABCD* (рис.13). Прямая *n*, проходящая через середины противоположных ребер *AB* и

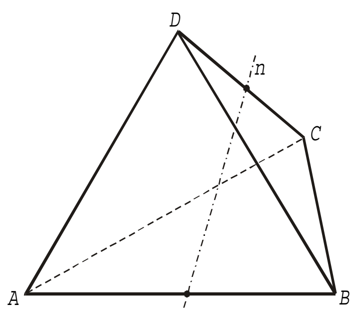

Рис. 13

CD, перпендикулярна им. Поэтому она является осью симметрии тетраэдра.

Задачи

5. Сколько осей симметрии имеет правильный тетраэдр?

6. Докажите, что если некоторый многогранник имеет *k* осей симметрии, где $k \ge 1$, то *k* нечетно.

7 (М555)**.** Рассмотрим пересечение а) двух; б) трех цилиндров одинакового радиуса, оси которых взаимно перпендикулярны и проходят через одну точку. Сколько плоскостей симметрии имеет это пересечение?

Помимо вращений вокруг прямых, тетраэдр и куб имеют и другие самосовмещения. Например, у куба есть симметрия относительно плоскости ACC_1A_1 или относительно плоскости, проходящей через середины ребер AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1.

Давайте сосчитаем количество самосовмещений правильного тетраэдра *ABCD*. Посмотрим пристально на его вершину *A*. Очевидно, при самосовмещении точка *A* может перейти в любую из четырех вершин *A*, *B*, *C*, *D*. Затем три остальные вершины *B*, *C* и *D* могут перейти в любом порядке в оставшиеся (после того, как одну из вершин заняла точка *A*) три вершины тетраэдра. Поскольку количество способов разложить три данные точки в три места равно шести, то группа самосовмещений тетраэдра состоит из $4 \cdot 6 = 24$ элементов. (Между прочим, если вы сделаете тетраэдр из металла или дерева и начнете перемещать его в пространстве, то сможете выполнить не все 24, а только 12 перемещений – те, которые сохраняют ориентацию [3] пространства.)

Задачи

8. Сколько самосовмещений имеет а) куб; б) октаэдр; в) додекаэдр; г) икосаэдр? Сколько из них сохраняют ориентацию, а сколько меняют?

9. Инопланетяне делают игрушки в форме а) куба; б) октаэдра; в) додекаэдра; г) икосаэдра и раскрашивают каждую грань в один из а) 6; б) 8; в) 12; г) 20 имеющихся цветов, каждую грань – в свой цвет. Сколько разных видов игрушек они могут изготовить? (Игрушки одинаковые, если одну из них так можно повернуть в пространстве, что она станет такой же, как другая.)

Множество *Ф* называют транзитивным, если для любых двух его точек *A* и *B* существует самосовмещение *f* множества *Ф*, которое переводит *A* в *B*. Например, множество вершин правильного многоугольника транзитивно.

Задачи

10. Придумайте транзитивное множество, состоящее из 10 точек, не являющихся вершинами правильного 10-угольника.

11. Перечислите все конечные транзитивные подмножества плоскости.

[3] Я не могу здесь подробно обсуждать понятие ориентации. Скажу лишь, что вращение вокруг прямой сохраняет ориентацию, а симметрия относительно плоскости – меняет.

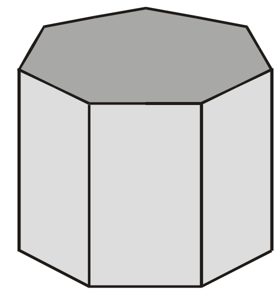

Рис. 14

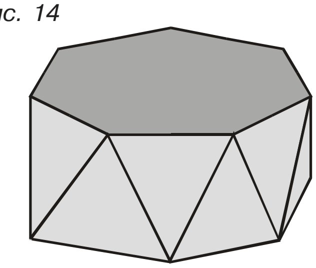

Рис. 15

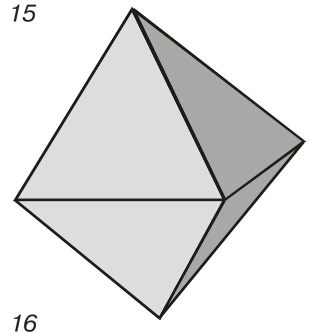

Рис. 16

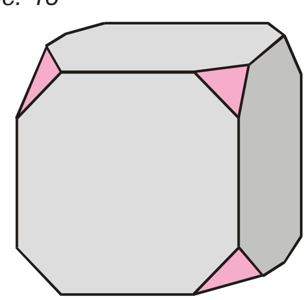

Рис. 17

Подробнее о транзитивных множествах можно прочитать в статьях В.Болтянского «Транзитивные множества и правильные многогранники» («Квант» №7 за 1980 год) и А.Шкляра «О транзитивных многогранниках» («Квант» №12 за 1980 год). Не имея здесь возможности подробно пересказывать содержание этих статей, ограничусь несколькими примерами транзитивных многогранников. Это правильная семиугольная призма (рис.14), антипризма (рис.15), октаэдр (рис.16) и усеченный куб (рис.17).

А.Спивак