Сфера, касающаяся ребер правильной пирамиды

Э.ГОТМАН

В учебных пособиях по геометрии часто встречаются задачи о сфере, описанной около правильной пирамиды, а также о сфере, вписанной в пирамиду (сфере, касающейся всех граней пирамиды), и гораздо реже – задачи, в которых фигурирует сфера, касающаяся всех ребер пирамиды. Между тем, задачи такого рода предлагаются на вступительных экзаменах в некоторые высшие учебные заведения. Для их решения требуется хорошее пространственное воображение, умение выполнить правильный и наглядный чертеж, знание планиметрии и тригонометрии. Старшеклассникам полезно познакомиться с приемами решения таких задач.

В предлагаемой статье рассматривается сфера, касающаяся всех ребер правильной пирамиды. Всегда ли существует такая сфера?

Прежде всего ответим на этот вопрос. Напомним некоторые сведения, которые потребуются нам в дальнейшем.

Как известно, плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку, называется касательной плоскостью к сфере, а их общая точка – точкой касания (рис.1). Любая прямая, лежащая в касательной плоскости и проходящая через точку касания A, называется касательной к сфере. Говорят также, что сфера касается прямой в точке A.

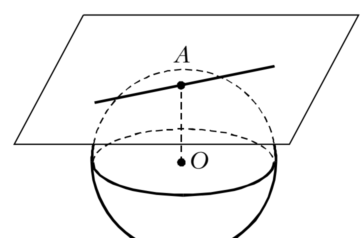

Рис. 1

Для прямой, касательной к сфере, имеет место теорема, аналогичная теореме о касательной прямой к окружности.

Теорема 1. *Если прямая касается сферы, то она перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. Обратно, если прямая проходит через точку сферы и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то она является касательной к сфере.*

Рассмотрим в пространстве множество точек – центров сфер, касающихся сторон данного треугольника. Прежде всего заметим, что центр O вписанной в треугольник ABC окружности является центром одной такой сфе-

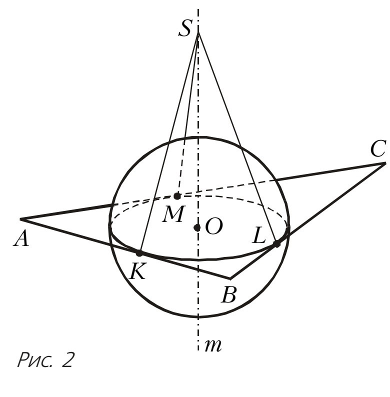

Рис. 2

ры (рис.2). Если K, L, M – точки касания окружности со сторонами AB, BC и CA соответственно, то сфера с центром O и радиусом OK касается всех сторон треугольника ABC. Теперь нетрудно догадаться, что искомое множество точек есть перпендикуляр к плоскости треугольника ABC, проходящий через точку O. Действительно, если S – точка, принадлежащая перпендикуляру m, то $SK = SL = SM$ как наклонные, имеющие на плоскости ABC равные проекции. Кроме того, по теореме о трех перпендикулярах $SK \perp AB$, $SL \perp BC$, $SM \perp CA$. Значит, согласно теореме 1, сфера с центром O и радиусом SK касается всех сторон треугольника ABC. Если же некоторая точка Q не лежит на перпендикуляре m к плоскости ABC, то не все расстояния от точки Q до сторон AB, BC, CA равны (в силу теоремы о наклонных и их проекциях на плоскость), и потому точка Q не является центром сферы, касающейся всех сторон треугольника ABC.

Аналогично доказывается, что в пространстве множество точек – центров сфер, касающихся всех сторон правильного многоугольника, также есть перпендикуляр к плоскости многоугольника, проходящий через его центр. Теперь дадим ответ на поставленный вопрос.

Теорема 2. *Для всякой правильной пирамиды всегда существует сфера, касающаяся всех ее ребер.*

Доказательство. Пусть $NA_1 \ldots A_n$ – правильная n-угольная пирамида, NH – ее высота, NK – апофема, P – центр окружности, вписанной в грань NA_1A_2 (на рисунке 3 изображена лишь n-я часть пирамиды). Центр сферы, касающейся всех сторон правильного многоугольника $A_1 \ldots A_n$, лежит на высоте NH пирамиды или на ее продолжении за точку H. Множество центров сфер, касающихся сторон треугольника NA_1A_2, есть перпендикуляр m к плоскости NA_1A_2, проходящий через точку P. Прямые m и NH лежат в одной плоскости и пересекаются в некоторой точке O_1. Это следует из того, что $A_1A_2 \perp NH$, $A_1A_2 \perp NK$, и, значит, по теореме о двух перпендикулярах, A_1A_2 – перпендикуляр к плоскости NKH. Поэтому плоскости NHK и NA_1A_2 перпендикулярны. Следовательно, прямая m лежит в плоскости NHK и пересекает прямую NH, поскольку угол NKH острый.

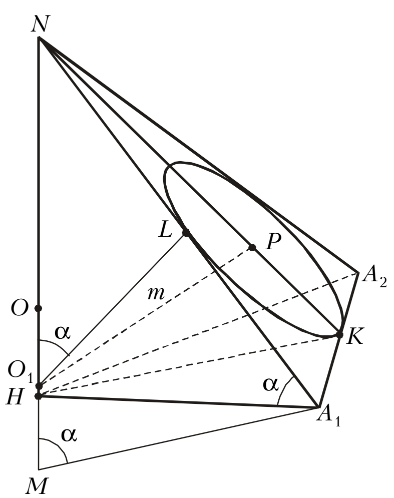

Рис. 3

Отсюда следует, что точка O_1 есть центр сферы, касающейся сторон основания пирамиды и боковых ребер NA_1 и NA_2. Радиус ее равен O_1K. Эта сфера касается и всех других ребер пирамиды, так как расстояния от точки O_1 до боковых ребер равны между собой.

Таким образом, всегда существует сфера, касающаяся всех ребер правильной пирамиды. При этом каждая грань пересекает сферу по окружности, вписанной в грань, а точки касания окружности с ребрами являются в то же время точками касания сферы и ребер. Центр сферы лежит на высоте пирамиды или на ее продолжении. Отрезок, соединяющий центр O_1 сферы с точкой касания L ребра пирамиды и окружности, вписанной в грань, перпендикулярен ребру и равен радиусу сферы.

Рассмотрим несколько задач о сфере, касающейся всех ребер правильной пирамиды.

Задача 1. *Боковое ребро правильной n-угольной пирамиды равно b, угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен α. Найдите радиус сферы, касающейся всех ребер пирамиды.*

Решение. Воспользуемся прежними обозначениями и рисунком 3. Так как $A_1A_2 \ldots A_n$ – правильный многоугольник, то, полагая $A_1A_2 = a$, имеем $A_1L = A_1K = \frac{1}{2}a$, $LN = b - \frac{1}{2}a$ (отрезки A_1L и A_1K равны, как отрезки касательных к окружности, вписанной в грань NA_1A_2). Прямоугольные треугольники HA_1N и LO_1N имеют общий угол N, и потому $\angle LO_1N = \angle HA_1N = \alpha$. Обозначив радиус искомой сферы через R_1, находим

$$R_1 = LN \operatorname{ctg}\alpha = \left(b - \frac{1}{2}a\right)\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$a = 2HA_1 \sin\frac{\pi}{n} = 2b\sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha.$$

Отсюда следует, что

$$R_1 = b\operatorname{ctg}\alpha\left(1 - \sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\right). \qquad (1)$$

В приведенном примере данные элементы b и α принадлежали одному прямоугольному треугольнику. Поэтому имелась возможность вычислять промежуточные неизвестные величины одну за другой. В более сложных случаях приходится прибегать к введению вспомогательных неизвестных.

Пользуясь формулой (1), легко получить другие формулы для вычисления радиуса R_1 сферы, касающейся всех ребер правильной пирамиды. Продолжим высоту NH пирамиды за точку H до пересечения с описанной около пирамиды сферой в точке M (см. рис.3). Тогда MN – диаметр сферы, а также диаметр окружности, описанной около треугольника A_1MN. Поэтому $\angle MA_1N = 90^\circ$, $A_1H \perp MN$, $\angle NMA_1 = \angle NA_1H = \alpha$. Если R – радиус сферы, описанной около правильной пирамиды, то $MN = 2R$. Из треугольника A_1MN следует, что $b = 2R\sin\alpha$, и поэтому

$$R_1 = 2R\cos\alpha\left(1 - \sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\right). \qquad (2)$$

Обозначим высоту NH пирамиды через h. Из треугольника NA_1H имеем $b = \frac{h}{\sin\alpha}$. Следовательно,

$$R_1 = \frac{h\cos\alpha\left(1 - \sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\right)}{\sin^2\alpha}. \qquad (3)$$

Центр сферы, вписанной в пирамиду, всегда лежит внутри пирамиды. Центр же описанной сферы может лежать как на высоте, так и на продолжении высоты вне пирамиды. Пользуясь рисунком 3, легко сравнить отрезки NH и MH. Если $\alpha = 45^\circ$, то центр O описанной сферы совпадает с центром основания H. При $\alpha > 45^\circ$ центр O лежит на высоте пирамиды, так как $NH > MH$, а при $\alpha < 45^\circ$ – на продолжении высоты NH за точку H ($NH < MH$).

Выясним, где расположен центр сферы, касающейся всех ребер пирамиды.

Задача 2. *Высота правильной n-угольной пирамиды равна h, угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания равен α. На каком расстоянии от плоскости основания находится центр O_1 сферы, касающейся всех ребер пирамиды?*

Решение. Воспользуемся формулой (3):

$$R_1 = \frac{h\cos\alpha\left(1-\sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\right)}{\sin^2\alpha}.$$

Далее находим

$$NO_1 = \frac{R_1}{\cos\alpha}.$$

Таким образом,

$$NO_1 - h = \frac{h\cos\alpha\left(\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\alpha}, \text{ где } 0<\alpha<\frac{\pi}{n}.$$

Отсюда следует, что точки O_1 и H совпадают тогда и только тогда, когда $\cos\alpha = \sin\frac{\pi}{n}$, или $\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$. Точка O_1 лежит на высоте пирамиды, если $NO_1 < NH$, или

$$\cos\alpha < \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right), \text{ откуда } \alpha > \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}.$$

Наконец, если $\alpha < \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$, то точка O_1 лежит на продолжении высоты пирамиды NH, т.е. вне пирамиды.

В частности, для правильной треугольной пирамиды получаем $\alpha = \frac{\pi}{6}$, для четырехугольной пирамиды $\alpha = \frac{\pi}{4}$, для шестиугольной $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Элементарно-геометрическим способом нетрудно доказать, что в правильной n-угольной пирамиде центры описанной и вписанной сфер совпадают тогда и только тогда, когда плоский угол при вершине пирамиды равен $\frac{\pi}{n}$, т.е. сумма всех плоских углов при вершине равна π. Могут ли в правильной n-угольной пирамиде совпадать центр описанной сферы и центр сферы, касающейся всех ребер пирамиды? Решив следующую задачу, получим ответ на этот вопрос.

Задача 3. *Докажите, что расстояние d между центром O сферы, описанной около правильной n-угольной пирамиды, и центром O_1 сферы, касающейся всех ее ребер, может быть выражено формулами*

$$а)\ d = \frac{|a-b|}{2\sin\alpha}, \qquad б)\ d = b\frac{\left|1-2\sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\right|}{2\sin\alpha},$$

где a и b – длины сторон основания и бокового ребра пирамиды, α – угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

Решение. Расстояние между центрами сфер равно $|NO_1 - NO|$. Из треугольника NO_1L (см. рис.3) находим

$$NL = b-\frac{a}{2},\ NO_1 = \frac{2b-a}{2\sin\alpha}.$$

Из треугольника MNA_1 имеем

$$MN = 2R = \frac{b}{\sin\alpha}, \text{ откуда } R = \frac{b}{2\sin\alpha}.$$

Следовательно,

$$NO_1 - NO = NO_1 - R = \frac{b-a}{2\sin\alpha},$$

или

$$d = \frac{|a-b|}{2\sin\alpha}.$$

Чтобы вывести формулу б), найдем зависимость между величинами a и b. Имеем: $HA_1 = b\cos\alpha$, $a = 2HA_1\sin\frac{\pi}{n}$. Значит, $a = 2b\sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha$. Подставив значение a в предыдущую формулу, получим

$$d = \frac{b\left|1-2\sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\right|}{2\sin\alpha}.$$

Из формулы а) следует, что центры O и O_1 совпадают тогда и только тогда, когда $a = b$, т.е. когда все боковые грани пирамиды – равносторонние треугольники, что возможно лишь при $n < 6$.

Из формулы б) следует, что $d = 0$ лишь при условии

$$2\sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha = 1, \text{ или } \cos\alpha = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Так как $\cos\alpha < 1$, то это возможно лишь при $n = 3$, $n = 4$ и $n = 5$.

Заметим, что если $n = 4$, то $\alpha = \frac{\pi}{4}$. При этом точки O, O_1 и H совпадают.

Итак, центры O и O_1 могут совпадать только тогда, когда правильная пирамида треугольная, четырехугольная или пятиугольная.

Задача 4. *Докажите, что в правильной шестиугольной пирамиде расстояние d между центрами сфер, описанной около пирамиды и касающейся всех ее ребер, выражается формулой*

$$d = \frac{1}{2}b\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Решение. Пусть NH – высота правильной шестиугольной пирамиды, O – центр описанной около нее сферы, O_1 –

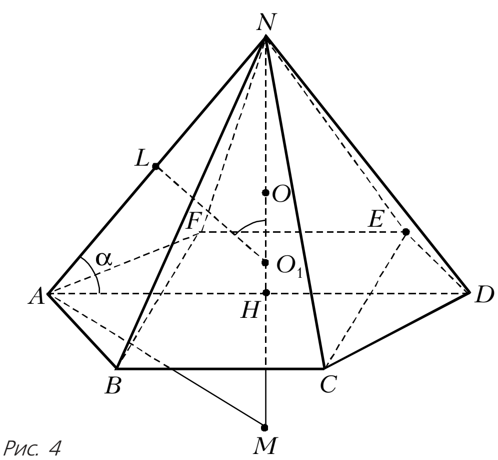

Рис. 4

центр сферы, касающейся всех ее ребер (рис.4). Воспользуемся результатом задачи 3 и получим

$$NO_1 - NO = \frac{b\left(1-2\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha\right)}{2\sin\alpha} = \frac{b(1-\cos\alpha)}{2\sin\alpha} = \frac{1}{2}b\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Так как $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, то $NO_1 - NO > 0$. Это значит, что центр описанной сферы при любом значении α лежит между вершиной пирамиды и центром сферы, касающейся всех ее ребер.

Задача 5. *Радиус сферы, описанной около правильной шестиугольной пирамиды, равен R. Радиус сферы, касающейся всех ее ребер, равен R_1. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду, и расстояния от вершины пирамиды*

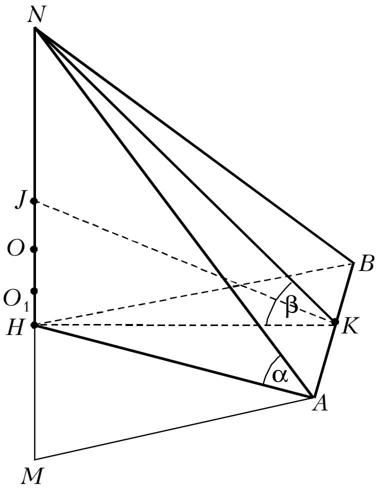

Рис. 5

до центров этих сфер, если $R = 4$ и $R_1 = 3$.

Решение. Проведем высоту NH данной шестиугольной пирамиды (рис.4 и 5). Тогда $\angle HKN$ – линейный угол двугранного угла при основании пирамиды. Центр J вписанной сферы лежит на высоте пирамиды и на биссектрисе угла HKN.

Введем обозначения: $JH = r$ (радиус вписанной сферы), $NH = h$, $\angle HKN = \beta$, $\angle NAH = \alpha$. По теореме о биссектрисе угла треугольника имеем

$$\frac{HJ}{JN} = \frac{HK}{KN},$$

или

$$\frac{r}{h-r} = \cos\beta,$$

откуда

$$r = \frac{h\cos\beta}{1+\cos\beta}. \qquad (4)$$

Вычислим неизвестные h и $\cos\beta$. Сначала найдем угол α. Воспользовавшись формулой (2), получим уравнение

$$R_1 = 2R\cos\alpha\left(1 - \frac{1}{2}\cos\alpha\right),$$

или

$$\cos^2\alpha - 2\cos\alpha + \frac{R_1}{R} = 0,$$

откуда $\cos\alpha = 1 - \sqrt{1 - \frac{R_1}{R}}$ (второй корень уравнения не подходит, так как $\cos\alpha < 1$).

При $R = 4$ и $R_1 = 3$ имеем

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}, \ \alpha = 60^\circ.$$

Далее из треугольников AMN и AHN находим

$$h = 2R\sin^2\alpha, \ h = 8\cdot\frac{3}{4} = 6.$$

Остается найти связь между углами α и β. Из треугольников ANH и KNH имеем $AH = h\operatorname{ctg}\alpha$, $KH = h\operatorname{ctg}\beta$. А так как $KH = AH\sin 60^\circ$, то

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\alpha,$$

и легко находим, что $\operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{2}$ и $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Подставив значения h и $\cos\beta$ в формулу (4), получим

$$r = \frac{3\left(\sqrt{5}-1\right)}{2} \approx 1{,}8.$$

Расстояние от вершины N пирамиды до центра O сферы, описанной около пирамиды, равно R, а расстояние от вершины N до центра O_1 сферы, касающейся всех ребер, равно $\frac{R}{\cos\alpha}$. Следовательно, если $R = 4$ и $R_1 = 3$, то $NO = 4$, $NJ \approx 6 - 1{,}8 = 4{,}2$ и $NO_1 = 6$ (т.е. центр O_1 совпадает с центром основания H).

Предлагаем читателю самостоятельно доказать истинность следующих соотношений между основными углами в правильной n-угольной пирамиде:

а) $\operatorname{tg}\alpha = \cos\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\beta$,

б) $\cos\alpha = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}\sin\frac{\gamma}{2}$, в) $\cos\beta = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$,

где γ – величина плоского угла при вершине пирамиды, α и β – величины тех же углов, что и в задаче 5.

Формулы а), б) и в) находят применение при решении предлагаемых ниже задач.

Следующая задача по содержанию близка предыдущей. Сохраняя прежние обозначения, при решении ее воспользуемся уже известными формулами.

Задача 6. *Дана правильная треугольная пирамида, r и R – радиусы вписанной и описанной сфер. Найдите высоту h пирамиды и радиус R_1 сферы, касающейся всех ребер пирамиды, если $r = 1$ и $R = 3{,}5$.*

Решение. Воспользуемся формулами

$$h = 2R\sin^2\alpha \quad \text{и} \quad h = \frac{r(1+\cos\beta)}{\cos\beta}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{2R}{r}\sin^2\alpha = \frac{1+\cos\beta}{\cos\beta}. \qquad (5)$$

В правильной треугольной пирамиде углы α и β связаны: $\operatorname{ctg}\alpha = 2\operatorname{ctg}\beta$. В силу тождества $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ имеем

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{4}{\sin^2\beta} - 3, \text{ откуда } \sin^2\alpha = \frac{1-\cos^2\beta}{1+3\cos^2\beta}.$$

Подставив значение $\sin^2\alpha$ в равенство (5), получим уравнение

$$(2R+3r)\cos^2\beta - 2R\cos\beta + r = 0,$$

которое при $\frac{R}{r} \ge 3$ имеет два корня:

$$\cos\beta = \frac{R \pm \sqrt{R^2 - 2Rr - 3r^2}}{2R+3r}$$

(если $\frac{R}{r} = 3$, то корни равны: $\cos\beta = \frac{1}{3}$).

При $r = 1$ и $R = 3{,}5$ уравнение принимает вид

$$10\cos^2\beta - 7\cos\beta + 1 = 0,$$

откуда $\cos\beta = \frac{1}{2}$ или $\cos\beta = \frac{1}{5}$.

Если $\cos\beta = \frac{1}{2}$, то $\beta = 60^\circ$, $\sin^2\alpha = \frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{3}{4}} = \frac{3}{7}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$. Получим

$$h = 2R\sin^2\alpha, \ h = 7;$$

$$R_1 = 2R\cos\alpha\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right), \ R_1 = 2\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right) \approx 2.$$

Если $\cos\beta = \frac{1}{5}$, то $\sin^2\alpha = \frac{6}{7}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{7}}$. Получим

$$h = 6, \ R_1 = \sqrt{7} - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}8.$$

Продолжим исследование свойств сферы, касающейся всех ребер правильной пирамиды. Для этого предварительно решим следующую задачу.

Задача 7. *Пусть R и r – радиусы сфер, описанной около правильной n-угольной пирамиды и вписанной в нее, d – расстояние между их центрами. Докажите, что*

а) $d^2 = R^2 - 2Rr - r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}$, *б)* $\frac{R}{r} \geq 1 + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}}$,

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда центры сфер совпадают.

Решение. Воспользуемся теми же обозначениями и формулами, что и при решении предыдущих задач. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} h = 2R \sin^2 \alpha, \\ h = r\left(1 + \frac{1}{\cos \beta}\right), \\ \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}} \operatorname{tg} \alpha. \end{cases}$$

Возведем в квадрат обе части последнего равенства и получим

$$\frac{1}{\cos^2 \beta} - 1 = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}\left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1\right).$$

Из первых двух уравнений находим

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{2R}{2R - h}, \quad \frac{1}{\cos \beta} = \frac{h - r}{r}.$$

Подставив эти значения в предыдущее равенство, получаем квадратное уравнение относительно h:

$$h^2 - 2(R + r)h + 4Rr + \frac{r^2}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} = 0, \qquad (6)$$

откуда

$$h = R + r + \sqrt{(R - r)^2 - \frac{r^2}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}}.$$

А так как расстояние d между центрами описанной и вписанной сфер равно $|NJ - NO| = |h - r - R|$, то

$$d = \sqrt{(R - r)^2 - \frac{r^2}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}},$$

или

$$d^2 = R^2 - 2Rr - r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}.$$

Дискриминант уравнения (6) неотрицателен, следовательно,

$$\frac{R}{r} \geq 1 + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}}.$$

Равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда $d = 0$, т.е. центры сфер совпадают.

Естественно поставить вопрос: нельзя ли получить аналогичное неравенство для радиуса описанной сферы и радиуса сферы, касающейся всех ребер правильной пирамиды?

Задача 8. *Пусть R – радиус сферы, описанной около правильной n-угольной пирамиды, и R_1 – радиус сферы, касающейся всех ее ребер. Докажите, что*

$$\frac{R}{R_1} \geq 2 \sin \frac{\pi}{n}.$$

Решение. Воспользуемся формулой (2):

$$R_1 = 2R \cos \alpha \left(1 - \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha\right)$$

и представим ее в виде

$$\frac{R_1}{R} = \frac{2}{\sin \frac{\pi}{n}} \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha \left(1 - \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha\right).$$

Применим неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим двух положительных чисел a и b: $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, где равенство имеет место только при $a = b$. Получим

$$y = \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha \left(1 - \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha\right) \leq \frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$\frac{R_1}{R} = \frac{2y}{\sin \frac{\pi}{n}} \leq \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{n}},$$

или

$$\frac{R}{R_1} \geq 2 \sin \frac{\pi}{n}.$$

Равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда

$$\sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha = 1 - \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha, \text{ или } 2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha = 1,$$

т.е. тогда, когда $n < 6$ и центры сфер совпадают (см. задачу 3). Для правильной треугольной пирамиды получаем $\frac{R}{R_1} \geq 3$, для четырехугольной пирамиды $\frac{R}{R_1} \geq \sqrt{2}$ (равенство имеет место при $\alpha = 45^\circ$). Для шестиугольной пирамиды и при всех $n > 6$ имеем $\frac{R}{R_1} > 1$, т.е. $R > R_1$.

Из приведенных примеров видно, что решение связанных между собой задач упрощается, если задачи расположены в определенной последовательности так, что решение первых, более простых задач помогает отыскать решение последующих.

Предлагаем читателям для самостоятельного решения еще несколько задач о сфере, касающейся ребер правильной пирамиды.

Упражнения

1. Сторона основания правильной пирамиды равна a, боковое ребро равно b. Найдите радиус сферы, касающейся всех ребер пирамиды.

2. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h. Двугранный угол при основании равен 60°. Найдите радиус r сферы, вписанной в пирамиду, и радиус R_1 сферы, касающейся всех ее ребер.

3. В сферу радиуса R вписана правильная шестиугольная пирамида, плоский угол при вершине которой равен γ. Найдите радиус сферы, касающейся всех ребер пирамиды.

4. Радиус сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды, в два раза больше радиуса сферы, касающейся всех ее ребер. Найдите величину плоского угла при вершине пирамиды.

5. В правильной n-угольной пирамиде центр O сферы, описанной около пирамиды, симметричен центру O_1 сферы, касающейся всех ее ребер, относительно плоскости основания. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к основанию. Вычислите его при $n = 6$.