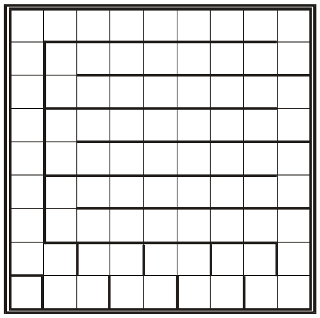

Рис. 4

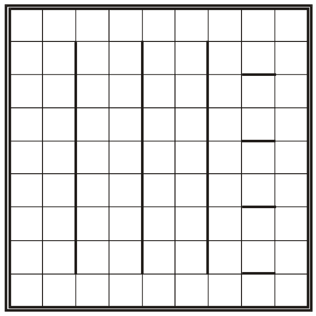

Рис. 5

такое значение достижимо (на нем открытые двери обозначены тонкими линиями, а закрытые – жирными).
б) Здесь в каждой белой комнате открыто не более 2 дверей, значит, всего открыто не больше $2 \times 40 = 80$ дверей. Рисунок 4 подтверждает, что такое тоже возможно.
в) Если здесь пойти тем же путем, то можно получить, что число открытых дверей не превышает $3 \times 40 = 120$. Однако практически достичь такого значения невозможно. Оказывается (вот некий легкий парадокс!), точнее ограничение сверху могут дать… черные комнаты, хотя их и больше! Дело в том, что 4 угловые черные комнаты имеют всего по 2 двери, остальные 37 черных комнат – больше чем по 2 двери. Поэтому общее число открытых дверей в черных комнатах не превышает $2 \times 4 + 3 \times 37 = 119$. А уж такое-то значение достижимо (рис.5).

Калейдоскоп «Кванта»

1. n.
2. Нет. Рассмотрите множество вершин правильного 11-угольника.
3. См. рис.6.
4. 6 осей, проходящих через середины противоположных ребер, и 3 оси, проходящие через центры противоположных граней.

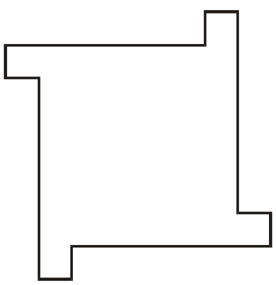

Рис. 6

5. 3 оси, проходящие через середины противоположных ребер.
6. Выбрав некоторую ось симметрии l, докажите, что для любой оси симметрии m прямая, симметричная прямой m относительно l, тоже является осью симметрии. Таким образом, все оси симметрии, скрещивающиеся с прямой l или оси, пересекающие l, но не перпендикулярные ей, разбиваются на пары. (Честно говоря, если количество осей симметрии конечно, то они проходят через одну точку. Но в решении задачи можно обойтись и без доказательства этого факта.) А для любой оси симметрии m, перпендикулярной прямой l и пересекающей прямую l, докажите, что прямая, проходящая через точку их пересечения перпендикулярно обеим прямым, тоже является осью симметрии.
7. а) Сечение этого тела плоскостью α, проходящей через оси цилиндров, – квадрат. Поэтому тело имеет плоскость симметрии α и еще четыре перпендикулярные α плоскости, проходящие через оси симметрии квадрата. б) Тело имеет 9 плоскостей симметрии (как куб).
8. а) $8 \cdot 3! = 48$; б) $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$; в) $20 \cdot 3! = 120$;
г) $12 \cdot 5 \cdot 2 = 120$. Половина самосовмещений сохраняют ориентацию, половина – меняют.
9. а) $6!/24 = 30$; б) $8!/24 = 1680$; в) $12!/60 = 7983360$;
г) $20!/60 = 40548366802944000$.
10. Поверните правильный пятиугольник вокруг его центра на угол, не кратный 72°.
11. Одна точка; две точки; вершины правильного многоугольника; объединение множества вершин правильного многоугольника с его образом при повороте вокруг центра многоугольника.

Нелинейные элементы в электрических цепях

1. Сопротивление надо уменьшить на 200 мОм.

2. $a = \dfrac{1}{\sqrt{P_X \left(R_2 R_3 / R_1\right)^3}} = 0{,}125\ \text{А}/\text{В}^2$.

3. $I_0 = \dfrac{\mathsf{E} - U_0}{R} = 5 \cdot 10^{-3}$ А; $q = C\left(\mathsf{E} - U_0\right) = 5 \cdot 10^{-4}$ Кл;

$Q_R = \dfrac{C\left(\mathsf{E} - U_0\right)^2}{2} = 12{,}5 \cdot 10^{-4}$ Дж.

Сфера, касающаяся ребер правильной пирамиды

1. $R_1 = \dfrac{a(2b-a)}{2\sqrt{2b^2 - a^2}}$, $b > \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

2. $r = \dfrac{1}{3}h$, $R_1 = \dfrac{1}{3}h\left(\sqrt{10} - \sqrt{2}\right)$.

3. $R_1 = 4R\sin\dfrac{\gamma}{2}\left(1 - \sin\dfrac{\gamma}{2}\right)$, $0^\circ < \gamma < 60^\circ$.

4. $\gamma \approx 37^\circ$ и $\gamma \approx 86^\circ$.

5. При $n = 6$ $\cos\alpha \approx 0{,}640$ ($\alpha \approx 50^\circ 10'$).

LXV Московская математическая олимпиада

Математический праздник

6 класс

1. БАО = 143. *Решение*. Если $\text{Б} \geq 2$, то $\text{БА} \geq 20$ и БАО > 200, так что $\text{БАО} \cdot \text{БА} \cdot \text{Б} > 200 \cdot 20 \cdot 2 = 8000 > 2002$. Значит, Б = 1.
Разложим число 2002 на простые множители: $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Теперь легко выписать все начинающиеся на цифру 1 двузначные делители числа 2002. Это числа 11, 13 и $2 \cdot 7 = 14$. Вычислим соответствующие частные: 2002 : 11 = 182, 2002 : 13 = 154 и 2002 : 14 = 143. Ответ очевиден: БАО = 143.
2. 2 или 6. *Решение.* Фигура состоит из 22 клеток. Если получилось x трехклеточных уголков и y четырехклеточных, то

$3x + 4y = 22$.

Очевидно, x четно и $x < 8$, так что $x = 0$, 2, 4 или 6. Значения $x = 0$ или 4 не подходят: y получается нецелым. При $x = 2$ или 6 получаем $y = 4$ или, соответственно, $y = 1$. Оба случая возможны, как показано на рисунке 7.

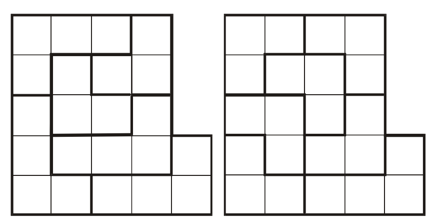

Рис. 7

3. 218, 219, 220, 221, 222, 224, 225, 226 и 227. *Решение.* Обозначим наименьшее из десяти чисел буквой x. Тогда

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) + (x+5) + (x+6) + (x+7) + (x+8) + (x+9) - (x+y) = 2002,$$

где $x + y$ – вычеркнутое число (так что $0 \leq y \leq 9$). Упростим уравнение:

$$10x + 45 - x - y = 2002, \text{ т.е. } 9x = 1957 + y.$$