Цепочка тетраэдров

В.ЗАЛГАЛЛЕР

Рассмотрим правильный тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$. Отразив его вершину A_1 относительно плоскости $A_2A_3A_4$, получим точку A_5. Отразив точку A_2 относительно плоскости $A_3A_4A_5$, получим точку A_6. Вообще, получив очередной тетраэдр $A_nA_{n+1}A_{n+2}A_{n+3}$ и отразив точку A_n относительно плоскости $A_{n+1}A_{n+2}A_{n+3}$, получим точку A_{n+4} – вершину очередного тетраэдра $A_{n+1}A_{n+2}A_{n+3}A_{n+4}$. К чему приводит эта конструкция? К винтообразной цепочке, изображенной на рисунке 1. Она же – в виде «шашлыка на шампуре» – показана на рисунке 2. А фотография этой цепочки – рисунок 3.

На фотографии видны три винтовые линии. Эти ломаные $A_1A_4A_7A_{10}A_{13}\ldots$, $A_2A_5A_8A_{11}A_{14}\ldots$ и $A_3A_6A_9A_{12}A_{15}\ldots$ видны и на рисунке 1. А на самом деле эти три линии можно объединить в одну винтовую линию $A_1A_2A_3A_4A_5\ldots$, вьющуюся вокруг некоторой прямой l.

Существование прямой l легко доказать при помощи теоремы Шаля для пространства, в силу которой любое перемещение пространства – это параллельный перенос, винтовое движение, скользящая или поворотная симметрия.[1] Поскольку тетраэдр $A_2A_3A_4A_5$ ориентирован так же, как и исходный тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$, то перемещение, которое увеличивает номер точки на единицу, т.е. переводит A_1 в A_2, A_2 в A_3, A_3 в A_4 и, наконец, A_4 в A_5, не может быть ни скользящей симметрией, ни поворотной симметрией (потому что эти преобразования не сохраняют, а меняют ориентацию). Не является оно и параллельным переносом. Значит, это винтовое движение! Применяя его многократно, получаем всю бесконечную цепочку тетраэдров.

Как расположена ось l порождающего бесконечную цепочку правильных тетраэдров винтового движения по отношению к этим тетраэдрам? Чтобы ответить на этот вопрос, найдем точки пересечения P_1 и P_2 оси l винтового движения с треугольниками $A_1A_2A_3$ и $A_2A_3A_4$ соответственно. Эти точки можно искать в декартовой системе координат. Но вычисления будут чуть проще, если воспользоваться барицентрическими координатами. Поскольку не все читатели знают, что это такое, дадим определение, сформулируем и докажем лемму и теорему, а после этого вернемся к точкам P_1 и P_2.

Определение. *Если P – точка плоскости ABC, то ее барицентрическими координатами относительно треугольника ABC называют числа* $x = S_{PBC}/S_{ABC}$, $y = S_{PCA}/S_{ABC}$ *и* $z = S_{PAB}/S_{ABC}$. (При этом, например, S_{PBC} – это площадь треугольника PBC, если точки P и A лежат по одну сторону от прямой BC, и взятая со знаком минус

[1] *Подробно об этом можно прочитать в книгах «Элементарная геометрия, ч.2 (стереометрия)» Ж.Адамара, «Введение в геометрию» Г.С.Коксетера, «Геометрические преобразования» П.С.Моденова и А.С.Пархоменко. (Прим. ред.)*

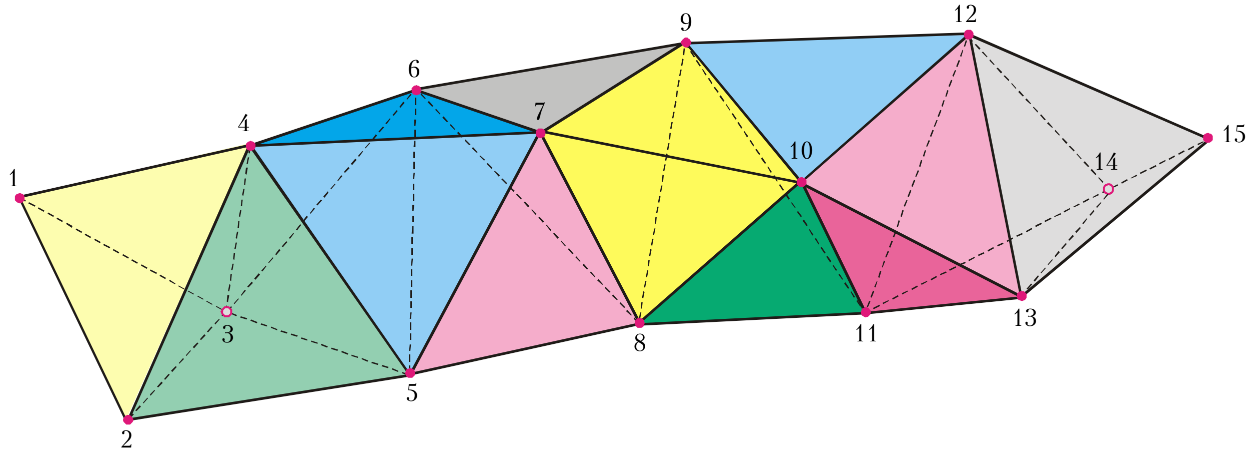

Рис. 1

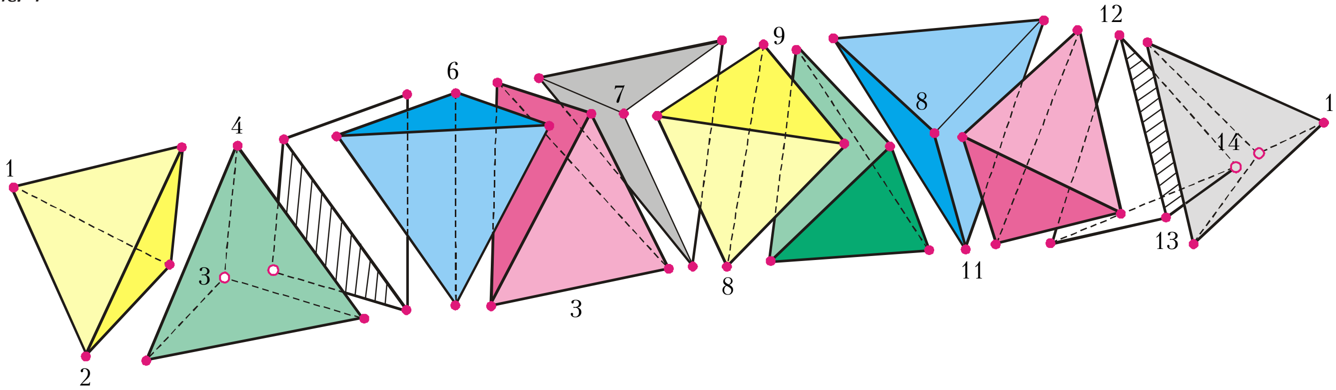

Рис. 2