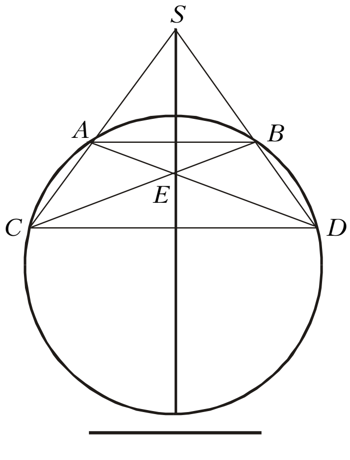

Рис.4

ную двум данным на плоскости параллельным прямым.

Через точку A проведем прямую, пересекающую параллельные прямые в точках B и C (рис.3). Взяв на прямой AB произвольную точку S, проведем через эту точку еще одну прямую, которая пересечет те же параллельные прямые в точках E и D. Пусть M – точка пересечения прямых BD и CE, N – точка пересечения прямых SM и AE, F – точка пересечения прямых BN и SD. Тогда AF – искомая прямая.

Построение 4. Найти диаметр окружности, перпендикулярный двум параллельным прямым, лежащим в плоскости окружности.

Возьмем на окружности точки A и C (рис.4) и построим хорды AB и CD, параллельные заданным прямым (построение 3). Для удобства построения точки A и C выбираются так, чтобы хорды AB и CD были заведомо не равны.

Если E – точка пересечения прямых AD и BC, S – точка пересечения прямых CA и DB, то искомый диаметр лежит на прямой SE.

Теперь решим задачу а).

Пусть окружности пересекаются в точках A и B (рис.5), причем сначала рассмотрим случай, когда отрезок AB не совпадает с диаметром одной из окружностей. В этих точках проведем к окружностям касательные (построение 2). Если C – точка пересечения касательных к одной окружности, а D – точка пересечения касательных к другой окружности, то прямая CD, в силу симметрии, проходит через центры окружностей.

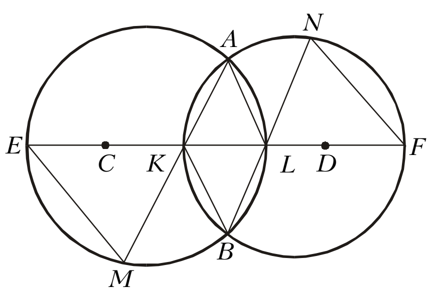

Рис.5

На рисунке 5 EL и KF – диаметры окружностей. Если построить другие диаметры этих окружностей, то задача будет решена.

Проведем прямые AK и BL до пересечения с окружностями в точках M и N, а затем проведем прямые EM и FN. $\angle LEM = \angle MAL$, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. Точно так же $\angle KFN = \angle KBN$. Но, учитывая симметрию, $\angle MAL = \angle KBN$, поэтому $\angle LEM = \angle KFN$, значит, прямые EM и FN параллельны.

Теперь, пользуясь построением 4, найдем диаметры окружностей, перпендикулярные прямым EM и FN.

Если точки пересечения окружностей очень близки к концам одного диаметра меньшей окружности (или, возможно, совпадают с концами диаметра, но это не известно заранее), так что получить точку пересечения касательных к меньшей окружности не удастся, можно воспользоваться точками пересечения касательных к меньшей окружности с большей окружностью – если рассматривать эти точки как вершины трапеции (или прямоугольника), то точка пересечения диагоналей такой трапеции (прямоугольника) и точка пересечения касательных к большей окружности находятся на прямой, проходящей через центры окружностей.

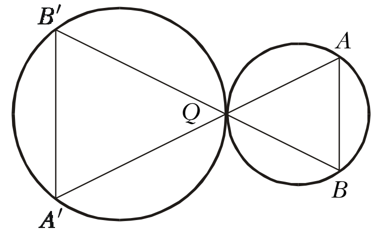

Рис.6

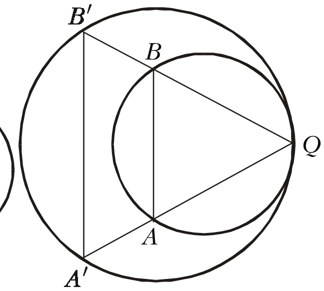

Рис.7

Если известно, что точки пересечения окружностей совпадают с концами диаметра меньшей окружности, или известно, что окружности равны, то построения значительно упрощаются (рассмотрите эти случаи).

б) Пусть окружности касаются в точке Q (рис.6 и 7). Проведем через эту точку две прямые, пересекающие окружности в точках A и B, A' и B' соответственно.

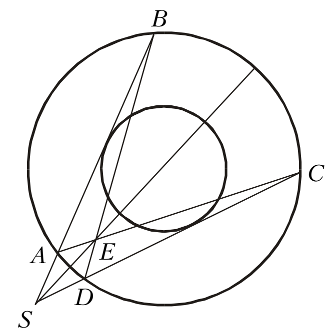

Рис.8

Учитывая гомотетию с центром в точке Q, прямые AB и $A'B'$ параллельны, поэтому, пользуясь построением 4, найдем диаметры окружностей, перпендикулярные этим прямым.

Проведя через точку Q другие прямые, найдем другие диаметры.

в) Взяв вне окружностей произвольную точку S, проведем касательные к меньшей окружности, которые пересекут большую окружность в точках A, B, C, D (рис.8).

Если E – точка пересечения прямых AC и BD, то прямая SE проходит через центр окружностей.

Так же найдем еще одну прямую, проходящую через центр.

В заключение стоит отметить, что если на чертеже нет других фигур, кроме одной окружности, то найти ее центр с помощью только линейки нельзя. Но если окружность задана вместе с центром, то с помощью одной линейки можно, как известно из геометрии, проводить всевозможные построения.

И.Вайнштейн

M1810*. *В каждой вершине выпуклого многогранника сходится четное число ребер. Одна грань многогранника красная, остальные – синие. Периметр каждой синей грани равен целому числу. Докажите, что периметр красной грани равен целому числу.*

Доказательству этого факта предпошлем две леммы.

Лемма 1. *Выпуклый многогранник, в каждой вершине*