Преобразование электрических цепей

А.ЗИЛЬБЕРМАН

В ЭТОЙ СТАТЬЕ РАССКАЗЫВАЕТСЯ О МЕТОДЕ, ПОЗВОЛЯЮЩЕМ упрощать сложные задачи по расчету электрических цепей.

Что мы понимаем под «преобразованием цепи»? Предположим, что у нас есть сложная схема из резисторов, имеющая множество выводов и подключенная к источникам. Заменим эту схему другой, но с тем же числом выводов, причем так, чтобы сопротивления между двумя любыми выводами у новой схемы были такими же, как у старой. Ясно, что источники «ничего не узнают» об этой замене и токи, потребляемые схемой, останутся прежними. Но найти эти токи, возможно, окажется проще.

Итак, если мы хотим подсчитать токи в сложной схеме, ее можно заменить более простой эквивалентной схемой. При этом токи внутри заменяемой части меняются. Поэтому так поступать можно только с той частью схемы, которая нас непосредственно не интересует.

Опубликовано в «Кванте» №3 за 1971 год.

С подобными заменами вы, конечно же, встречались. Пусть, например, в схеме два сопротивления[1] r_1 и r_2 включены последовательно. Их мы можем заменить одним, равным по величине сумме $r_1 + r_2$. Если же два сопротивления включены параллельно, то их также можно заменить одним, величина которого равна $\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$. Это – простейшие примеры преобразования цепей. Мы же остановимся на более сложных схемах.

Посмотрим, как преобразуются друг в друга схемы, имеющие по три вывода, – «звезда» и «треугольник» (рис.1).

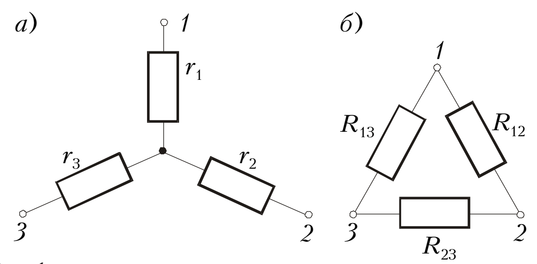

Рис. 1

Немного непривычные обозначения на рисунке 1,*б* очень удобны – индексы показывают, между какими точками включено сопротивление. Например, сопротивление R_{13} включено между точками *1* и *3* и т.д.

Если мы хотим заменить одну из этих схем другой, нужно получить такие соотношения между r и R, чтобы сопротивления между любыми точками были для обеих схем одинаковы.

В схеме «звезда» (см. рис.1, *а*) сопротивление между

[1] *Здесь и далее более правильно говорить «два резистора с сопротивлениями r_1 и r_2». (Прим. ред.)*

точками *1* и *2* равно $r_1 + r_2$, а в схеме «треугольник» оно равно $\dfrac{R_{12}\left(R_{13}+R_{23}\right)}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}$. Следовательно, для того чтобы сопротивления между точками *1* и *2* были одинаковы для обеих схем, необходимо, чтобы

$$r_1 + r_2 = \frac{R_{12}\left(R_{13}+R_{23}\right)}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}. \qquad (1)$$

Аналогично, для точек *2* и *3*

$$r_2 + r_3 = \frac{R_{23}\left(R_{13}+R_{12}\right)}{R_{12}+R_{13}+R_{23}} \qquad (2)$$

и для точек *1* и *3*:

$$r_1 + r_3 = \frac{R_{13}\left(R_{12}+R_{23}\right)}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}. \qquad (3)$$

Система уравнений (1)–(3) легко решается. Сложим все уравнения и поделим обе части на 2:

$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{R_{12}R_{13}+R_{12}R_{23}+R_{13}R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}.$$

Вычтя теперь из этого уравнения уравнение (2), получим

$$r_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}.$$

Аналогично,

$$r_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}$$

и

$$r_3 = \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}.$$

Эти результаты легко запомнить – знаменатель всюду один и тот же, а в числителе справа дважды встречается тот же индекс, что и слева: $r_1 \to R_{12}R_{13}$, $r_2 \to R_{12}R_{23}$, $r_3 \to R_{13}R_{23}$.

Немного сложнее получить формулы для обратного преобразования:

$$R_{12} = \frac{r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3}{r_3},$$

$$R_{13} = \frac{r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3}{r_2},$$

$$R_{23} = \frac{r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3}{r_1},$$

но их также легко запомнить – числитель всюду один и тот же, а в знаменателе стоит как раз тот индекс, которого недостает слева.

Пользуясь формулами, которые мы только что получили, можно производить замену одной схемы другой. Например,

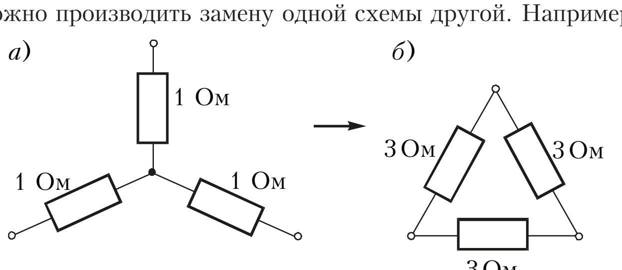

Рис. 2

«звезду» с сопротивлениями 1 Ом можно заменить «треугольником» с сопротивлениями 3 Ом (рис.2).

Решим теперь такую задачу: найдем сопротивление между точками A и B в схеме на рисунке 3.

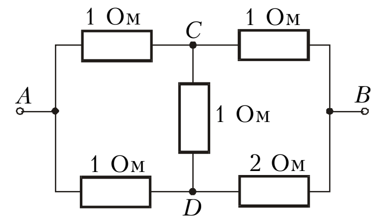

Рис. 3

Это обычная схема «мостика», но в нашей задаче «мостик» не уравновешен. Такие задачи приходится решать при помощи правил Кирхгофа. В школьной программе их нет, да и вычисления с помощью этих правил очень громоздкие – в нашем случае получилась бы система пяти уравнений с пятью неизвестными. Мы поступим проще: заменим «треугольник» ACD «звездой», как показано на рисунке 4. Теперь ясно, что сопротивление между точками A и B будет равно

$$R_{AB} = \frac{1}{3}\ \text{Ом} + \frac{28}{33}\ \text{Ом} = \frac{13}{11}\ \text{Ом}.$$

Мы заменяли «треугольник» ACD «звездой», но можно было решать задачу иначе – заменяя «звезду» ADB «треугольником» (проделайте это самостоятельно).

Пусть теперь к точкам A и B подключена батарея с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением и ЭДС $\mathcal{E} = 1$ В. Нужно найти ток через участок CB. Понятно, что преобразовать схему надо так, чтобы не затронуть интересующее нас сопротивление CB. Подойдет то преобразование,

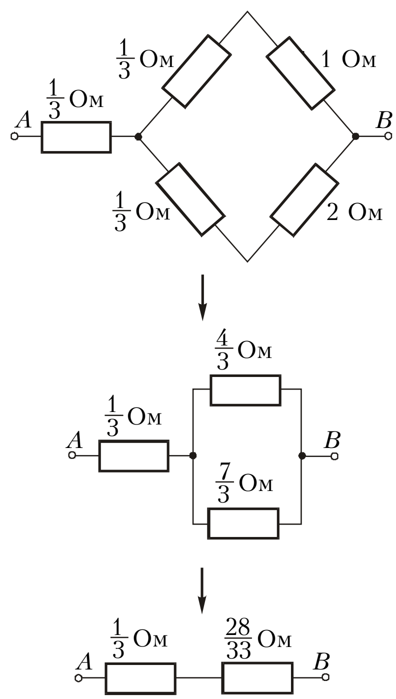

Рис. 4

которое мы делали раньше (см. рис.4). Используя, что $R_{AB} = \dfrac{13}{11}$ Ом, получим

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{AB}} = \frac{11}{13}\ \text{А}.$$

После разветвления токи в верхней и в нижней ветвях поделятся в отношении, обратном сопротивлениям ветвей:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{7}{4}.$$

(Продолжение см. на с. 34)

(Начало см. на с. 30)

Отсюда находим

$$I_1 = \frac{7}{13}\ \text{А}.$$

Немного сложнее было бы найти ток, идущий через участок CD. Для этого пришлось бы еще найти ток через участок AC, а затем вычесть из него найденный уже ток через участок CB.

Можно еще немного усложнить задачу – учесть внутреннее сопротивление батареи r. Тогда полный ток равен

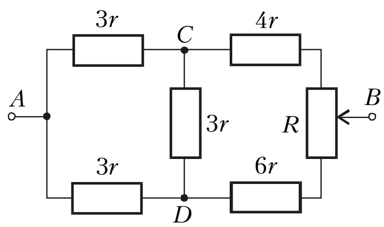

Рис. 5

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_{AB}},$$

а остальные токи находятся так же, как и раньше.

Рассмотрим более интересную задачу: найдем, при каком соотношении между величинами r и R сопротивление между точками A и B в схеме, показанной на рисунке 5, максимально в крайнем положении движка потенциометра.

Сначала преобразуем схему, заменив «треугольник» ACD «звездой» (рис.6). Очевидно, что сопротивление r не влияет на соотношение сопротивлений в остальной цепи. Займемся поэтому оставшейся частью схемы. Тут включены параллельно два сопротивления: $5r + R_1$ и $7r + R_2$, где R_1 и R_2 – сопротивления верхней и нижней частей потенциометра соответственно. При этом сумма сопротивлений $5r + R_1$ и $7r + R_2$ остается постоянной. Посмотрим, какими они должны быть, чтобы полное сопротивление было максимальным. Обозначим

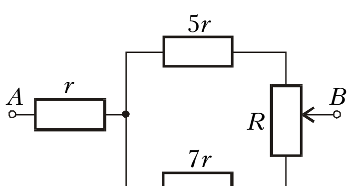

Рис. 6

$$5r + R_1 = r_1 \text{ и } 7r + R_2 = r_2.$$

Тогда общее сопротивление включенных параллельно частей схемы равно

$$r_0 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Если учесть, что

$$r_1 + r_2 = \text{const} = c,$$

то

$$r_0 = \frac{r_1(c - r_1)}{c}.$$

Это выражение максимально, когда максимален числитель. Но $y = cr_1 - r_1^2$ – это уравнение параболы, ветви которой пересекают ось абсцисс в точках 0 и с. Поэтому числитель дроби наибольший при $r_1 = c/2$. Так как $r_1 + r_2 = c$, то это означает, что сопротивление между точками A и B максимально, если $r_1 = r_2$, т.е.

$$5r + R_1 = 7r + R_2, \text{ или } R_1 - R_2 = 2r.$$

Ясно, что это возможно лишь в том случае, если сопротивление всего потенциометра $R = R_1 + R_2$ не меньше чем $2r$. В противном же случае максимум сопротивления между точками A и B достигается, когда движок потенциометра находится в крайнем положении.

Итак, ответ: $R \le 2r$.

Метод, о котором мы рассказали, очень удобен для последовательного преобразования сложной схемы к простому виду. Он позволяет рассчитать практически любую сложную цепь, состоящую из сопротивлений. Однако его можно применять и к цепям, содержащим не только сопротивления. Обратим внимание на то, что мы вообще не говорили нигде о физических процессах в цепи, а пользовались только формальным выражением для закона Ома: $U = rI$. Из него следует, что при последовательном соединении сопротивлений их величины складываются, а при параллельном – складываются величины, обратные сопротивлениям. Понятно, что если какие-нибудь другие физические величины связаны законом, аналогичным закону Ома, то все наши выводы справедливы и для них.

Рис. 7

В качестве примера рассмотрим цепь с конденсатором (рис.7). Мы знаем, что заряд конденсатора Q связан с его емкостью C и напряжением на нем U соотношением

$$Q = CU, \text{ или } U = \frac{1}{C}Q.$$

Сравним последнее выражение с выражением для закона Ома $U = rI$. Видно, что законы похожи, только вместо тока стоит заряд, а вместо сопротивления–величина, обратная емкости. Это означает, что для того чтобы найти, скажем, заряды на конденсаторах, можно поступить так: вместо цепи, содержащей конденсаторы, нарисовать цепь, содержащую сопротивления, причем конденсатор емкостью $C(\Phi)$ заменить сопротивлением $r = \dfrac{1}{C}$ (Ом). После того как мы рассчитаем токи в цепи из сопротивлений, можно сразу записать, каковы заряды на конденсаторах: если по сопротивлению течет ток $I = x$ (А), то на соответствующем конденсаторе будет заряд $Q = x$ (Кл). ЭДС батарей при таком преобразовании цепи остаются без изменения. Но, разумеется, в цепи с конденсаторами внутренние сопротивления батарей не влияют на результат. Поэтому, преобразуя цепь, нам придется лишить батареи их внутренних сопротивлений.

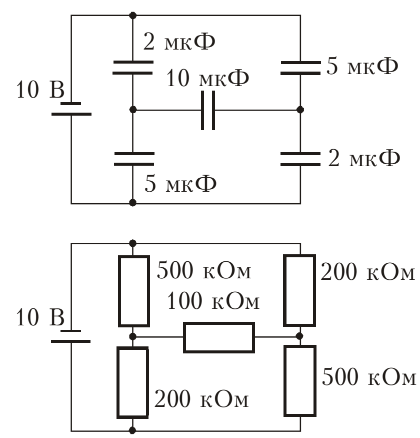

Рис. 8

Пусть, например, нужно найти заряд на конденсаторе емкостью 10 мкФ в схеме, изображенной на рисунке 8. Конденсатору емкостью $C = 2$ мкФ $= 2 \cdot 10^{-6}$ Ф соответствует сопротивление $r = 5 \cdot 10^5$ Ом $= 500$ кОм. Далее расчет проводится уже достаточно просто (проделайте это самостоятельно).

Таким образом, метод преобразования цепей, как мы видим, пригоден и для схем из конденсаторов.