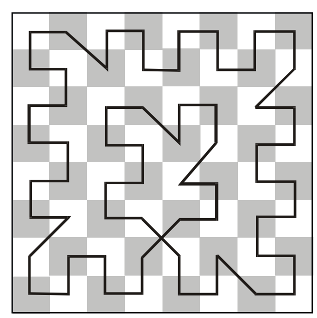
Решения задач М1796–М1800, Ф1808–Ф1817

М1796. *Король обошел шахматную доску, побывав на каждом поле по одному разу, и последним ходом вернулся на исходное поле. Когда соединили центры полей, которые он последовательно проходил, получилась замкнутая ломаная из 64 звеньев (каждому ходу соответствует одно звено). Оказалось, что никакие два соседних звена не лежат на одной прямой. Докажите, что наименьшее возможное число диагональных ходов равно 8.*

Назовем угловое поле и еще два поля, соседние с ним по стороне, *угловой группой*. Всего, таким образом, получим 4 угловые группы. Докажем, что хотя бы одна клетка каждой угловой группы является концом (или, если хотите, началом) диагонального звена. Для этого допустим обратное – что это не так, и рассмотрим любую уголовую группу, для определенности левую нижнюю (поля a1, a2 и b1). Так как от поля a1 не отходит диагональное звено, то поле a1 соединяется «прямыми» звеньями с полями a2 и b1. Далее, от полей a2 и b1 диагональные ходы не отходят, и, кроме того, поле a2 не может соединяться с полем a3 (так как получатся два соседних звена a1-a2-a3, лежащих на одной прямой), а также поле b1 не может соединяться с полем c1 (по аналогичной причине). Что же выходит? Единственные возможные звенья, отходящие от полей a2 и b1, ведут в одно и то же поле b2. Противоречие. Значит, хотя бы одна клетка каждой угловой группы является концом диагонального звена. Заметим также, что никакие две клетки из разных угловых групп не могут соединяться *общим* диагональным звеном (слишком далеко они расположены одна от другой). Таким образом, как минимум 4 диагональных хода (вблизи углов) должны быть.

Запомним пока этот результат и введем еще кое-какие термины. А именно: центральную часть доски размером 4×4 назовем *середкой*, а все остальное – *каймой* (с «шириной», равной 2 клеткам). Понятно, что должны быть ходы, соединяющие середку и кайму между собой (поскольку король обошел *всю* доску). Докажем следующий факт: *любой ход, соединяющий середку и кайму, либо сам диагональный, либо каждому такому ходу можно поставить в соответствие диагональный ход, целиком лежащий на кайме (причем этот ход не является ни одним из рассмотренных выше «вблизиугольных» ходов).* Итак, рассмотрим любой ход, соединяющий середку и кайму. Если он диагональный, то доказывать здесь нечего. Пусть он не диагональный, а «прямой». Для определенности рассмотрим ход, которому соответствует звено d2-d3 (для других ходов доказательство аналогично). Тогда хотя бы одно звено, отходящее от поля d1, должно быть диагональным. В самом деле, звена d1-d2 быть не может (ибо тогда соседние звенья d1-d2-d3 лежали бы на одной прямой), и если диагонального звена нет, то остается единственная возможность: звенья c1-d1-e1, опять-таки лежащие на одной прямой. Таким образом, каждому «прямому» ходу, соединяющему середку и кайму, соответствует диагональный ход на кайме (или сам этот ход является диагональным). Отметим напоследок, что никакой из этих диагональных ходов не является одновременно каким-либо из ранее рассмотренных диагональных ходов «вблизи углов».

Итак, если центр и середку соединяют N ходов, то (с учетом «вблизиугольных» диагональных ходов) общее число диагональных ходов не меньше $N + 4$. Так как путь короля замкнутый, то сколько раз король переходит с каймы на середку, столько раз и возвращается обратно. Поэтому N – четное число. Если $N \geq 4$, то общее число диагональных ходов получается не меньше 8. Рассмотрим отдельно случай $N = 2$ и убедимся, что и здесь общее число диагональных ходов не меньше 8. Для этого докажем, что при $N = 2$ *внутри* середки *непременно* будет хотя бы два диагональных хода. Итак, пусть некоторые две (ровно две!) клетки на границе середки соединены звеньями с какими-то полями каймы. Разобьем середку на 4 квадрата размером 4×4. В силу вечного принципа Дирихле хотя бы два из них *не содержат* ни одной из этих самых двух клеток, соединенных с каймой. Пусть для определенности один из этих квадратов – левая нижняя четвертушка середки, т.е. состоит из полей c3, c4, d3 и d4. Докажем, что хотя бы от одной из трех клеток – c3, c4, d3 – отходит диагональное звено. Как доказать? Да очень просто – точно так же, как мы в начале решения доказывали наличие диагонального звена, отходящего хотя бы от одного из полей a1, a2, b1. В самом деле, кроме двух звеньев, середка не имеет ничего общего с каймой, так что клетки c3, c4, d3 являются такими же угловыми полями для середки – своеобразной «внутренней доски». И доказательство совершенно аналогично.



Таким образом, если середка соединена с каймой ровно двумя звеньями, то внутри середки есть еще по крайней мере два диагональных звена.

Итак, всего на доске не меньше 8 диагональных ходов. С другой стороны, путь короля, содержащий ровно 8 диагональных ходов, существует (см. рисунок). Так что окончательный ответ: 8.

И.Акулич

М1797. *Красные и синие точки, строго чередуясь, разделили окружность на 2n дуг. Из них любые две смежные дуги различаются по длине на 1. Докажите, что n-угольник с красными вершинами и n-угольник с синими вершинами имеют равные периметры и равные площади.*

Ввиду геометрического смысла задачи начальное n, для которого реализуется ее утверждение, равно 2. Тогда четыре точки, две красные и две синие, разделили окружность на четыре дуги. Если длина минимальной дуги равна l, то возможны два варианта для последовательно выписанных длин четырех дуг: (l, $l+1$, $l+2$, $l+1$) и (l, $l+1$, l, $l+1$). И в том, и в другом варианте n-угольник с красными вершинами и n-угольник с синими вершинами будут «двуугольниками», т.е. удвоенными хордами (хорда с красными концами и хорда с синими концами), и притом равной длины. Периметры таких двуугольников равны, а площади их тоже раны, ибо равны нулю.

Обратимся к общему случаю. Выпишем последовательно длины $2n$ дуг, на которые разделена окружность:

$$l_1, l_2, l_3, \ldots, l_{2n}. \qquad (1)$$

При этом $\left|l_i - l_{i+1}\right| = 1$ для $1 \le i < 2n$, а также $\left|l_{2n} - l_1\right| = 1$. Наряду с последовательностью (1) рассмотрим две другие последовательности, содержащие по n чисел:

$$l_1 + l_2,\ l_3 + l_4,\ \ldots,\ l_{2n-1} + l_{2n} \qquad (2)$$

и

$$l_{2n} + l_1,\ l_2 + l_3,\ \ldots,\ l_{2n-2} + l_{2n-1}. \qquad (3)$$

Можно считать, что в (2) последовательно выписаны n дуг, стягивающих стороны n-угольника с красными вершинами, а в (3) – длины дуг, стягивающих стороны n-угольника с синими вершинами. Утверждается, что последовательности (2) и (3) эквивалентны в том смысле, что всякое число, встречающееся сколько-то раз в одной из них, столько же раз встречается и в другой. Это без затруднений можно доказать методом математической индукции по n. При переходе $n \to n+1$ из последовательности (1), содержащей $2n+2$ чисел, мы убираем минимальное число и соседнее с ним, и, воспользовавшись предположением индукции, показываем, что соответствующие последовательности (2) и (3) для случая $n+1$ тоже будут эквивалентны.

Так как n-угольник с красными вершинами и n-угольник с синими вершинами имеют одни и те же стороны, то их периметры равны. Но и площади их тоже равны, ибо они вписаны в одну окружность.

В.Произволов

М1798. *Известно, что в некотором городе живут 1000 человек и ровно 300 из них – честные. Остальных назовем хитрыми. На некоторые вопросы хитрые отвечают правду, а на некоторые лгут по своему усмотрению. Сколько хитрых людей мы можем обнаружить, задавая жителям произвольное число вопросов, при условии, что жители все друг о друге знают?*

Мы сможем обнаружить 100 хитрых людей. Спросим каждого жителя про честность каждого, в том числе и про его собственную честность.

Для каждого человека a обозначим множество людей, про которых a сказал, что они честные, через $S(a)$.

Введем три способа определения заведомо хитрых людей:

а) человек заведомо хитрый, если он сказал про себя, что он хитрый;

б) человек заведомо хитрый, если он назвал честными не 300 человек;

в) если a сказал, что b честный и $S(a)$ не равно $S(b)$, то a – хитрый.

Действительно, если a был бы честным, то и b был бы честным и на все вопросы они дали бы одинаковые ответы.

Исключим уже определенных хитрых из рассмотрения.

Тогда оставшиеся люди разобьются на группы по 300 человек такие, что все люди из одной группы говорят про всех людей из этой же группы, что они честные, а про всех людей из остальных групп – что они хитрые. Докажем это. Пусть a про 300 человек сказал, что они честные. Все эти люди дали такие же ответы (в противном случае они были бы заведомо хитрыми по способу в)). Никто другой не может сказать ни про одного из этих 300 человек, что он честный (способ а)). Так как максимальное количество групп по 300 человек три, то количество обнаруженных хитрых не меньше 100.

Докажем, что при правильной стратегии хитрых мы сможем выявить не больше 100 хитрых людей.

Хитрые должны создать две группы по 300 человек, и каждый из них должен говорить, что в его группе все честные, а все остальные – хитрые. На более сложные вопросы типа «Правда ли, что размер обуви самого высокого честного плюс количество букв в имени самого старого хитрого равняется простому числу?» каждый человек должен отвечать так, как он ответил бы, если бы его группа состояла из честных, а все остальные были бы хитрыми.

Н.Васильев, Б.Гинзбург

М1799*. *Натуральные числа x и y таковы, что сумма $xy + x + y$ дает квадрат целого числа. Докажите, что найдется натуральное число z такое, что каждая из семи сумм $xy + z$, $yz + x$, $zx + y$, $yz + y + z$, $zx + z + x$, $xy + yz + zx$ и $xy + yz + zx + x + y + z$ дает квадрат целого числа.*

Предъявим выражение натурального числа z в явном виде. Положим $z = x + y + 2m + 1$, где $m = \sqrt{xy + x + y}$. Выпишем семь равенств:

$$yz + y + z = (y + m + 1)^2,$$

$$zx + z + x = (x + m + 1)^2,$$

$$xy + z = (m + 1)^2,$$

$$yz + x = (y + m)^2,$$

$$zx + y = (x + m)^2,$$

$$xy + yz + zx = (x + y + m)^2,$$

$$xy + yz + zx + x + y + z = (x + y + m + 1)^2.$$

Справедливость каждого из этих равенств проверяется непосредственно, и вместе с тем утверждение задачи доказано.

Пар чисел x и y, удовлетворяющих условиям задачи, существует бесконечно много.

В.Произволов

М1800. *Докажите, что сумма квадратов площадей граней любого тетраэдра равна учетверенной сумме квадратов площадей трех его сечений, каждое из которых проходит через середины четырех ребер.*

Сначала докажем следующее утверждение.

Теорема косинусов для тетраэдра. Пусть S_0, S_1, S_2, S_3 – площади граней тетраэдра, α_{ij} – двугранный угол между гранями с площадями S_i и S_j. Тогда

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - 2S_1S_2\cos\alpha_{12} - 2S_1S_3\cos\alpha_{13} - 2S_2S_3\cos\alpha_{23}.$$

Доказательство. Так как площадь любой грани тетраэдра равна сумме площадей проекцией на нее остальных граней, имеем

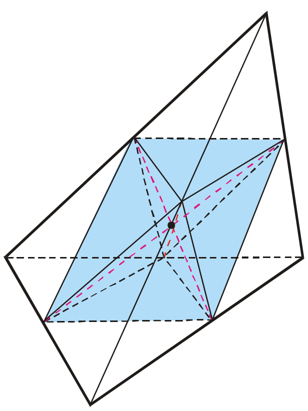
$$S_0 = S_1\cos\alpha_{01} + S_2\cos\alpha_{02} + S_3\cos\alpha_{03},$$

$$S_1 = S_0\cos\alpha_{01} + S_2\cos\alpha_{12} + S_3\cos\alpha_{13},$$

$$S_2 = S_0\cos\alpha_{02} + S_1\cos\alpha_{12} + S_3\cos\alpha_{23},$$

$$S_3 = S_0\cos\alpha_{03} + S_1\cos\alpha_{13} + S_2\cos\alpha_{23}.$$

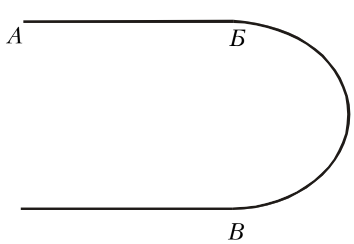
Умножив второе равенство на S_1, третье на S_2, четвертое на S_3 и вычтя из их суммы первое, умноженное на S_0, получим утверждение теоремы.



Теперь четырьмя плоскостями, параллельными граням тетраэдра и проходящими через середины его ребер, отрежем от него четыре вдвое меньших тетраэдра. Получим многогранник, ограниченный 8 треугольниками. Серединные сечения исходного тетраэдра разбивают этот многогранник на 8 тетраэдров, основания которых равны уменьшенным вдвое граням исходного, а боковые грани – четвертям его серединных сечений (см. рисунок). Если применить к каждому из них теорему косинусов и сложить полученные равенства, то каждое из удвоенных произведений войдет в сумму с противоположными знаками, и в результате будет получено утверждение задачи.

А.Заславский

Ф1808. *Траектория точки состоит из отрезка прямой АБ длиной L и полуокружности БВ радиусом R, причем прямая касается окружности (см. рисунок). За какое минимальное время точка проедет из А в В? Начальная скорость равна нулю, а ускорение все время постоянно по величине и равно а.*



Скорость движения точки по окружности при заданных в условии ограничениях не может превышать $v_m = \sqrt{aR}$. Следовательно, к моменту перехода на окружность необходимо иметь именно такую скорость (больше нельзя – не удержаться на окружности, а меньше – нет смысла). Для разгона по прямой от нуля до этой скорости нужно пройти путь $L_0 = v_m^2/(2a) = R/2$. Если $L < L_0$, то задача сильно усложняется – придется «доразгоняться» на окружности, а там касательная составляющая ускорения уже не постоянна (решение задачи про разгон на окружности – Ф1583 – см. в «Кванте» №3 за 1997 г.). При $L > L_0$ все довольно просто – нужно разогнаться до максимально возможной скорости, а затем начать торможение и к концу отрезка *АБ* снизить скорость до $v_m = \sqrt{aR}$. Обозначим время дополнительного разгона через t (столько же займет и торможение). Тогда для этого времени t получим уравнение

$$\frac{1}{2}\left(L - L_0\right) = v_m t + \frac{1}{2}at^2,$$

откуда

$$t = \sqrt{\frac{L + R/2}{a}} - \sqrt{\frac{R}{a}}.$$

Теперь легко найти полное минимальное время движения:

$$T = \frac{L_0}{v_m/2} + 2t + \frac{\pi R}{v_m} = (\pi - 1)\sqrt{\frac{R}{a}} + 2\sqrt{\frac{L + R/2}{a}}.$$

А.Простов

Ф1809. *Три маленьких груза массой M каждый соединены тонкими легкими стержнями длиной L, образуя треугольную конструкцию АБВ. Этот треугольник скользит по гладкому горизонтальному столу. В некоторый момент скорость точки А направлена вдоль АБ и равна v, а скорость точки Б в этот же момент параллельна БВ. Найдите скорость точки В и силу натяжения стержней.*

Стол гладкий и горизонтальный, поэтому скорость центра масс системы *АБВ* постоянна и угловая скорость вращения тоже не меняется. Проекция скорости точки *Б* на *АБ* равна проекции скорости точки *А* на *АБ*, тогда мгновенная скорость точки *Б* равна $v_Б = 2v$, а ее «перпендикулярная» составляющая равна $2v\sin 60^\circ = v\sqrt{3}$. В связанной с точкой *А* системе отсчета скорость точки *Б* определяется ее вращением вокруг *А*, т.е. равна $v\sqrt{3}$, такая же скорость вращения и у точки *В* (она направлена перпендикулярно *АВ*). В неподвижной системе осталось сложить векторы $\vec{v}$ и $\vec{v}\sqrt{3}$. Поскольку угол между ними равен 150°, по теореме косинусов квадрат искомой скорости равен $\left(v^2 + 3v^2 - 2vv\sqrt{3}\cos 150^\circ\right) = 7v^2$. Тогда мгновенная скорость точки *В* равна $v\sqrt{7}$.

Угловую скорость вращения системы *АБВ* можно найти множеством разных способов. Рассмотрим, например, поворот отрезка *АБ* за очень малый интервал времени. В поступательно движущейся со скоростью v вдоль направления *АБ* системе отсчета точка *А* неподвижна, а скорость точки *Б* равна $v\sqrt{3}$ и перпендикулярна *АБ*, тогда угловая скорость равна $\omega = \left(v\sqrt{3}\right)/L$.

Теперь найдем силы натяжения стержней (очевидно, они все одинаковы):

$$2T\cos 30^\circ = \frac{M\omega^2 L}{\sqrt{3}},$$

откуда

$$T = \frac{Mv^2}{L}.$$

А.Старов

Ф1810. *Клин массой M_1 с углом α при вершине может свободно двигаться по гладкой горизонтальной поверхности. На нем расположен еще один клин массой M_2 с таким же углом при вершине так, что его верхняя плоская поверхность горизонтальна (рис.1). Сверху на этот клин положили грузик массой m. С какой силой нужно действовать по горизонтали на нижний клин, чтобы грузик некоторое время мог оставаться неподвижным?*

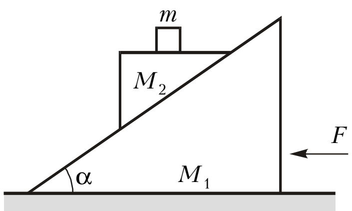


Рис.1

Для выполнения условия задачи сумма сил, действующих на грузик массой m, должна быть равна нулю. Это возможно, если клин массой M_2 имеет точно такое же ускорение a, как и клин массой M_1, – будем считать, что они едут вместе (проскальзывание с постоянной относительной скоростью не меняет дела). Запишем соответствующие уравнения движения (см. рис.2) для грузика:

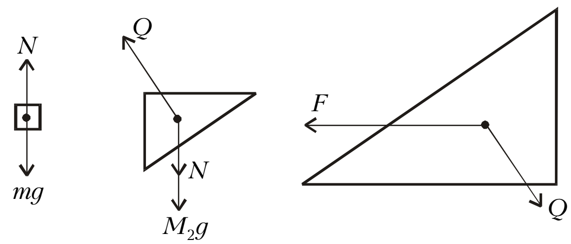


Рис.2

$$mg - N = 0,$$

для верхнего клина по вертикали:

$$M_2 g + N - Q\cos\alpha = 0$$

и по горизонтали:

$$Q\sin\alpha = M_2 a,$$

а также для нижнего клина (нарисованы только силы, дающие проекции на горизонтальное направление):

$$F - Q\sin\alpha = M_1 a.$$

Решая эти уравнения, найдем

$$F = (M_1 + M_2)(1 + m/M_2) g \operatorname{tg}\alpha.$$

З.Рафаилов

Ф1811. *Анна Каренина слышит звук камертона и с удивлением понимает, что вместо ноты «ля» второй октавы звучит нота «си». Приближается поезд или удаляется? С какой скоростью? Что можно сказать о музыкальном слухе героини? Нужные данные найдите где угодно.*

Частота f ноты «си» в $2^{1/12} = 1{,}06$ раза больше «правильной» частоты f_0 ноты «ля». В соответствии с эффектом Доплера это означает, что поезд приближается со скоростью

$$v = c\left(\frac{f}{f_0} - 1\right) = 340\ \text{м/с} \cdot 0{,}06 = 20\ \text{м/с} = 72\ \text{км/ч}$$

(здесь c = 340 м/с – скорость звука в воздухе). Многовато для тех времен. Скорее всего, героиня одноименного романа не очень точно определила изменение тональности звука – должно быть, волновалась…

Л.Толстов

Ф1812. *Во сколько раз отличается плотность сухого воздуха при давлении 1 атм и температуре +20 °С от плотности влажного воздуха при тех же условиях? Пар считать насыщенным.*

Примем давление насыщенного пара при данной температуре равным 2 кПа. При общем давлении 100 кПа 2% молекул сухого воздуха в выбранном объеме заменяются молекулами воды (если общее давление при данной температуре не изменилось, то число частиц осталось прежним). Значит, отношение плотностей влажного и сухого воздуха равно

$$\frac{\rho_{\text{вл}}}{\rho_{\text{сух}}} = \frac{29 \cdot 0{,}98 + 18 \cdot 0{,}02}{29} = \frac{28{,}78}{29} = 0{,}9924,$$

где 29 г/моль – молярная масса воздуха, 18 г/моль – молярная масса водяных паров. Таким образом, плотность влажного воздуха меньше примерно на 3/4%.

З.Рафаилов

Ф1813. *Порция кислорода участвует в цикле, состоящем из изотермического расширения, сжатия до начального объема при неизменном давлении и нагревания до начальной температуры при постоянном объеме. Цикл длится 10 секунд, на изотерме газ получает 1000 Дж тепла, а в изобарном сжатии над ним совершается работа 700 Дж. Найдите по этим данным среднюю механическую мощность, развиваемую в цикле, и термодинамический КПД.*

Работу в цикле и механическую мощность найти совсем легко. Действительно, полученные на изотерме 1000 Дж тепла полностью переходят в работу, при сжатии работа газа равна −700 Дж, на изохоре работа нулевая, тогда работа в цикле составляет $A =$ $= 1000$ Дж − 700 Дж = 300 Дж и при длительности цикла $\tau = 10$ с мощность равна

$$N = \frac{A}{\tau} = 30\ \text{Вт}.$$

Для нахождения термодинамического КПД η нужно вычислить полученное в цикле количество теплоты. Тепло газ получает при изотермическом расширении и при изохорическом нагревании. Первое слагаемое нам известно, второе найдем, исходя из того, что при изобарном сжатии внутренняя энергия уменьшается на некоторую величину, но на эту же величину она должна увеличиться при нагревании до первоначальной температуры (возвращение на изотерму). Этой же величине равно количество теплоты, полученное газом при изохорическом нагревании. Итак (поскольку газ двухатомный),

$$\Delta U = 2{,}5\nu R\Delta T = 2{,}5p\Delta V = 2{,}5 \cdot 700 \text{ Дж} = 1750 \text{ Дж}.$$

Тогда полное количество теплоты составляет

$$Q = 1000 \text{ Дж} + 1750 \text{ Дж} = 2750 \text{ Дж},$$

и термодинамический КПД равен

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{300 \text{ Дж}}{2750 \text{ Дж}} = 0{,}11 = 11\%.$$

З.Циклов

Ф1814. *Одна из квадратных пластин плоского конденсатора закреплена горизонтально, и на нее помещена большая тонкая пластина из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1$. По гладкой верхней поверхности листа диэлектрика может свободно скользить массивная вторая пластина конденсатора, имеющая такие же размеры, как и первая. На обкладки конденсатора помещены заряды Q и $-Q$, и система приведена в равновесие. Сдвинем верхнюю пластину по горизонтали на малое расстояние x параллельно одной из сторон квадрата и отпустим. Найдите период колебаний этой пластины. Площадь каждой из обкладок S, толщина диэлектрика d существенно меньше размеров пластин. Масса подвижной обкладки M.*

Расчет сил (горизонтальных!) в данном случае совсем не прост – они обусловлены так называемыми «краевыми эффектами». Но можно посчитать не «в лоб».
Запишем энергию конденсатора в равновесном положении пластин и при смещении верхней пластины на x:

$$W_0 = \frac{Q^2}{2C_0} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 a^2},$$

$$W_1 = \frac{Q^2}{2C_1} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 a(a-x)},$$

где $a = \sqrt{S}$ – сторона квадратной пластины. Найдем разность этих энергий с учетом малости x по сравнению с размером a:

$$W_1 - W_0 = \frac{Q^2 dx}{2\varepsilon_0 a^3}.$$

Видно, что эта величина пропорциональна смещению x – получается ПОСТОЯННАЯ возвращающая сила, колебания вовсе не гармонические! Это означает, в частности, что период этих колебаний зависит от начального смещения (амплитуды) x.
Итак, сила равна

$$F = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 a^3},$$

тогда ускорение (обозначим его b, поскольку буква a занята) равно

$$b = \frac{Q^2 d}{2M\varepsilon_0 a^3},$$

а четверть периода колебаний равна времени возвращения пластины в положение равновесия:

$$0{,}25T = \sqrt{2x/b}.$$

Отсюда находим период колебаний:

$$T = 8\sqrt{\frac{\varepsilon_0 xMa^3}{Q^2 d}} = 8\sqrt{\frac{\varepsilon_0 xMS^{3/2}}{Q^2 d}}.$$

А.Зильберман

Ф1815. *Для измерения сопротивления резистора собрана схема из батарейки, амперметра и вольтметра, причем вольтметр подключен параллельно резистору и показывает 1 В, а амперметр подключен к ним последовательно и показывает 1 А. После того как приборы в схеме поменяли местами, вольтметр стал показывать 2 В, а амперметр показал 0,5 А. Считая батарейку идеальной, определите по этим данным сопротивление резистора. Хороши ли используемые приборы?*

Напряжение батарейки в обоих случаях одно и то же, поэтому, обозначив сопротивление амперметра r, получим

$$1 \text{ В} + r \cdot 1 \text{ А} = 2 \text{ В} + r \cdot 0{,}5 \text{ А},$$

откуда

$$r = 2 \text{ Ом}.$$

Тогда напряжение батарейки составляет 3 В, напряжение резистора в обоих случаях равно 1 В, а токи через него одинаковы и составляют 0,5 А. При этом получается, что резистор и вольтметр имеют одинаковые сопротивления – по 2 Ом, как и амперметр.
Заметим, что амперметр довольно плохой – при таких измеряемых токах сопротивление его слишком велико. Вольтметр ОЧЕНЬ плохой (еще один такой же амперметр, но с замененной шкалой?). И только резистор и батарейка (особенно батарейка) в этой задаче на что-то годны!

Р.Александров

Ф1816. *На тороидальный сердечник, сделанный из материала с очень большой магнитной проницаемостью, намотаны очень тонким проводом две катушки – с числом витков 500 и 510. При измерении индуктивности первой из катушек на постоянном токе – по значению магнитного потока катушки при заданном токе через нее – получили величину 20 Гн. Какова индуктивность второй катушки? Какая индуктивность получится при последовательном соединении катушек? При параллельном соединении? Выводы катушек сделаны проводом большого сечения. Рассеяние магнитного потока считать малым.*

Измерять индуктивность на постоянном токе можно несколькими способами. Самый распространенный способ – задать ток через катушку, а потом измерить ее магнитный поток по отбросу стрелки подключенного к ней баллистического гальванометра при отключении катушки от внешней цепи. (Для катушки с большой индуктивностью гальванометр не подходит, нужно применять куда более грубый прибор, но именно в баллистическом режиме – когда ток через прибор практически перестает течь, а стрелка только начинает отклоняться и продолжает делать это по инерции.) Можно также задать ток через катушку, а потом, размыкая внешнюю цепь, при помощи диода перекачать ее энергию в конденсатор известной емкости и измерить его напряжение (или заряд). В общем, сделать это можно.

Вернемся к задаче. Для магнитного потока одной катушки поле в сердечнике $B \sim In$, где I – ток, а n – число витков, а магнитный поток через все витки катушки $\Phi = BSn \sim In^2$, где S – сечение сердечника. Тогда индуктивность первой катушки равна $L_1 = kn_1^2$, откуда $k = 20\ \text{Гн}/500^2 = 8 \cdot 10^{-5}$ Гн. Соответственно, индуктивность второй катушки равна

$$L_2 = kn_2^2 = 20{,}8\ \text{Гн}.$$

При соединении катушек существенно направление токов через них – переключая выводы одной из катушек наоборот, мы изменяем направление поля, создаваемого витками этой катушки, и изменяем знак магнитного потока, пронизывающего эту катушку. Пусть при последовательном соединении катушек витки второй как бы являются продолжением витков первой – поля и потоки при этом складываются: $B = B_1 + B_2 \sim$ $\sim I(n_1 + n_2)$, $\Phi \sim I(n_1 + n_2)^2$, а общая индуктивность равна

$$L_3 = k(n_1 + n_2)^2 = 81{,}6\ \text{Гн}.$$

При противоположном включении катушек поля вычитаются, остается только поле 510 – 500 = 10 витков. Потоки полей частично компенсируются, и остается поток только через 10 витков. Значит, индуктивность будет равна

$$L_4 = k(n_1 - n_2)^2 = 8 \cdot 10^{-3}\ \text{Гн}.$$

Для параллельного подключения все намного сложнее – токи распределяются обратно пропорционально сопротивлениям обмоток (не сразу, нужно подождать установления), а они в наших условиях пропорциональны числам витков катушек. Для случая противоположного включения обмоток получается нулевое суммарное поле, поля катушек в точности компенсируют друг друга, и индуктивность оказывается нулевой. При «согласном» подключении обмоток поля обмоток одинаковы и складываются. А вот поток нужно считать только через одну обмотку (это станет особенно ясным, если рассмотреть две одинаковые обмотки, – индуктивность в этом случае получается такая же, как для одной обмотки). В результате мы получим индуктивность чуть больше 20 Гн.

А.Повторов

Ф1817. *Искусственный хрусталик для глаза сделан так, что позволяет четко видеть удаленные предметы. В отличие от естественного хрусталика, кривизна поверхностей которого может изменяться (при этом глаз фокусируется на выбранных объектах – это называется аккомодацией глаза), искусственный хрусталик жесткий и перестраиваться не может. Оцените оптическую силу очков, дающих возможность читать книгу. Расстояние от глаза до книги принять равным примерно 0,3 м.*

Назначение очков – располагать изображение предмета там, где хозяину очков удобно его наблюдать. В нашем случае читатель держит книгу на расстоянии 0,3 м от глаза, а изображение должно получиться вдали. Это означает, что книга находится практически в фокальной плоскости линзы, т.е. фокусное расстояние линзы составляет $F = 0{,}3$ м. Оптическая сила при этом равна $D = 1/F = 3{,}3$ дптр.

Большая точность в таком расчете неуместна, нужно взять очки +3 или +3,5 диоптрии. Учет расстояния между глазом и линзой (примерно 1 см) практически не меняет результат.

Автор задачи с удовлетворением сообщает, что после обследования с помощью сложного прибора (содержащего лазер и встроенную ЭВМ) ему были прописаны в описанном случае именно такие очки!

А.Зильберман

Вниманию наших читателей!

Дорогие друзья!

К сожалению, в этот раз вы не получите Приложения к очередному номеру нашего журнала («Квант» № 3 за 2002 год).

Мы были вынуждены пойти на эту меру в связи с непредвиденными расходами – введением 10-процентной ставки НДС на продукцию средств массовой информации, решение о которой было принято Государственной Думой РФ уже после окончания подписной компании на периодические издания.