Физика 9–11

Публикуемая ниже заметка «Похожие движения» предназначена девятиклассникам, заметка «Преобразование электрических цепей» – десятиклассникам и «Разрешающая способность измерительных приборов» – одиннадцатиклассникам.

Похожие движения

Я.СМОРОДИНСКИЙ

Существует ряд механических движений, которые хотя и различны по природе, но описываются одними и теми же формулами. Поэтому, если мы выясним, как меняются какие-то величины при одном движении, можно сделать выводы для аналогичных.

Расскажем о двух таких движениях.

Гармонические колебания. Между движением по окружности и гармоническим колебанием можно установить полезное соответствие.

Рассмотрим материальную точку, которая движется равномерно по окружности. Ее скорость равна v и направлена по касательной к окружности. Если радиус окружности R, то центростремительное ускорение точки равно v^2/R и направлено по радиусу к центру (рис.1).

Посмотрим, как движется проекция точки на диаметр окружности. Из рисунка ясно, что если положение точки на окружности задается углом φ, то положение ее проекции определяется координатой

$$x = R\cos\varphi .$$

Проекция скорости на диаметр равна

$$u = -v\sin\varphi ,$$

а проекция ускорения –

$$a = -\frac{v^2}{R}\cos\varphi .$$

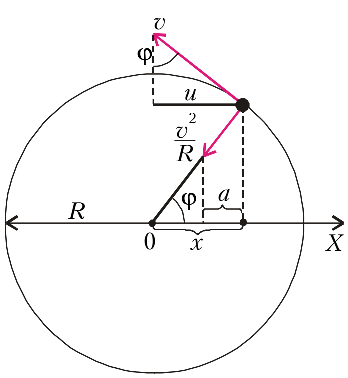

Рис. 1

Из первой и третьей формул легко получить, что

$$a = -\left(\frac{v^2}{R^2}\right)x .$$

С таким же ускорением двигалась бы материальная точка массой m под действием силы

$$F = ma = -m\left(\frac{v^2}{R^2}\right)x .$$

Сила, пропорциональная координате, называется гармонической, а движение под действием такой силы – гармоническим колебательным движением.

Введем вместо линейной скорости угловую: $\omega = v/R$. Тогда $\varphi = \omega t$, и

$$x = R\cos\omega t ,$$

$$u = -\omega R\sin\omega t ,$$

$$a = -\omega^2 R\cos\omega t .$$

Таким образом, мы получили все характеристики гармонического движения. Отсюда можно сделать вывод, что проекцию точки на окружности можно заменить реальной частицей, движение которой будет описываться полученными выше формулами.

Напомним, что входящие в уравнение второго закона Ньютона величины $\vec{F}$ и $\vec{a}$ – векторные. Следовательно, их можно спроектировать на любое направление, и зависимость между проекциями будет тоже описываться законом Ньютона.

Туннель в Земле. Покажем, что на точку, находящуюся внутри Земли, также действует гармоническая сила.

Пусть материальная точка массой m находится на расстоянии r от центра Земли. Если r больше радиуса Земли R, то на точку со стороны Земли действует сила тяготения

$$F = G\frac{Mm}{r^2} ,$$

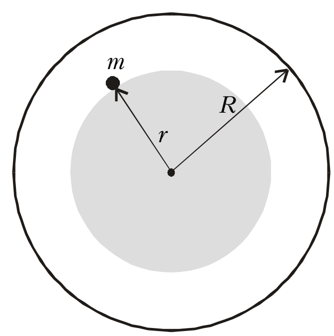

Рис. 2

где G – гравитационная постоянная, а M – масса Земли. Если же $r < R$, то действие, которое оказывает на точку Земля, можно разбить на две части (рис.2): действие внутренней сферы (радиусом r) и действие внешнего сферического слоя.

Как известно, сферический слой не создает внутри себя поля тяжести. Поэтому на точку будет действовать только внутренняя часть, масса которой равна

$$M_{вн} = \frac{4}{3}\pi r^3\rho ,$$

где ρ – плотность Земли, с силой тяготения

$$F = -G\frac{M_{вн}m}{r^2} = -G\frac{4\pi\rho m}{3}r .$$

Следовательно, внутри Земли на точку действует гармоническая сила, пропорциональная расстоянию от центра Земли. Движение точки внутри Земли, например в туннеле, оказывается похожим на движение тела, подвешенного к пружине, – упругая сила пружины также пропорциональна ее растяжению.

Теперь мы можем решить такую задачу. Допустим, что через центр Земли прорыт узкий туннель (рис.3). В него из точки A уронили (без начальной скорости) камень. Камень

Опубликовано в «Кванте» №9 за 1971 год.

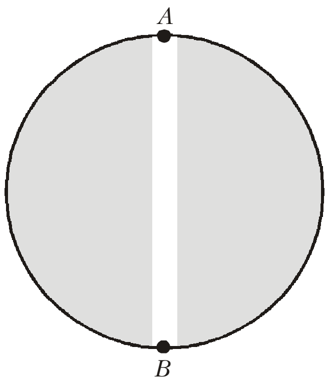

Рис. 3

долетает до точки B и начинает падать обратно, опять долетает до точки A и начинает падать к точке B, и так далее. Как найти период таких колебаний?

Фактически, эту задачу мы уже решили. Движение камня в туннеле можно рассматривать, как движение проекции точки, вращающейся вокруг Земли у ее поверхности, например спутника на круговой орбите вблизи Земли. Поэтому частота колебаний камня в туннеле равна угловой частоте вращения спутника вокруг Земли. Так как центростремительное ускорение спутника $a = \omega^2 R$ (расстояние от спутника до поверхности Земли $h \ll R$) и, с другой стороны, $a = F/m$, то угловая частота равна

$$\omega = \sqrt{\frac{a}{R}} = \sqrt{\frac{F}{mR}} = \sqrt{G\frac{4\pi\rho mR}{3mR}} = \sqrt{G\frac{4\pi\rho}{3}}.$$

Период колебаний, следовательно, равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}.$$

Отметим, что эта формула определяет и период колебаний тел в туннеле, проведенном через Землю в любом направлении (не обязательно через центр). Это следует из приведенного выше утверждения о том, что уравнение Ньютона остается справедливым, если входящие в него векторные величины заменить их проекциями на любое направление. Однако можно провести доказательство и непосредственно, заметив, что хорда во столько же раз меньше диаметра, во сколько проекция силы на направление хорды меньше самой силы.

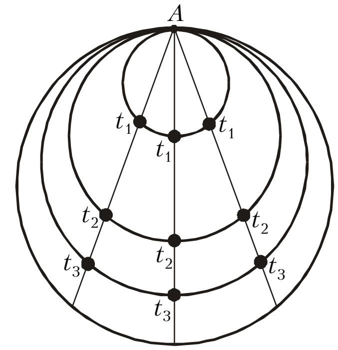

Рис. 4

Тот же период будет характеризовать и движение точки по подземному круговому туннелю с центром в центре Земли.

Теперь вы, наверное, сами можете показать, что если одновременно уронить несколько тел в разные туннели, исходящие из одной точки A (рис.4), то в любой момент времени t_1, t_2, ... они будут находиться на окружности, проходящей через точку A.